Dansk Skoleforening
for Sydslesvig e.V.

VEJLEDNING FOR FAGET
MATEMATIK

Version: 31. maj 2019

INDHOLD

VEJLEDNING FOR FAGET MATEMATIK

FAGETS IDENTITET OG ROLLE

Matematiske arbejdsmåder

Faget matematik har en række karakteristiske arbejdsmåder, som elevernes læring skal baseres på. Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation.

At matematik fordrer og fremmer kreativt arbejde betyder, at matematik blandt andet er en eksperimenterende og undersøgende proces, hvor eleverne udvikler deres egne matematiske resultater. Det stiller store krav til de aktiviteter, som foregår i undervisningen, da disse skal tilrettelægges, så eleverne kan opnå erfaringer med og indsigt i væsentlige matematiske sammenhænge. I den proces er det helt afgørende, at eleverne indgår i dialog og samarbejde med hinanden, således at de får lejlighed til at diskutere og afprøve forskellige muligheder, overveje alternativer, formulere og afprøve hypoteser, argumentere for løsninger og fremlægge resultater. Ofte kan simple spørgsmål danne udgangspunkt for undersøgelser. Fx:

- Indskolingen: Hvor mange forskellige firkanter kan du lave på sømbrættet?
- Mellemtrinnet: 1=1/1 Find flere eksempler på brøker, hvis værdi er 1. Hvor mange kan I finde?
- Udskolingen: I skal undersøge, om sammenhængen mellem højde og "bredde" på æg er lineær. Brug et passende digitalt værktøj.

Eleverne skal helt fra de yngste klasser lære at undersøge, stille spørgsmål, opstille hypoteser etc., således at de igennem skoleforløbet tilegner sig redskaber og færdigheder i at arbejde undersøgende og eksperimenterende. I nogle tilfælde er det hensigtsmæssigt at kunne foretage en systematisk undersøgelse, fx ved at udvælge væsentlige parametre og ændre en ad gangen eller anvende forskellige repræsentationsformer, mens de i andre tilfælde må prøve sig frem, eksemplificere og måske herudfra arbejde sig frem imod en god ide. I denne proces er dialog og samarbejde helt afgørende, herunder udvikling af matematisk sprog og kommunikation såvel internt gennem dialogen i gruppen som eksternt, når resultater skal formidles til andre. Heri ligger samtidig udvikling af matematisk argumentation ud fra eksempler og resultater af undersøgelser.

UDVIKLING AF MATEMATISK KOMPETENCE

De matematiske kompetencer, eleverne skal udvikle igennem skolens matematikundervisning, skal både bidrage til deres personlige liv og til deltagelse i samfundslivet. På den måde skal skolens matematikundervisning både virke alment dannende og som forberedelse til videre uddannelse og arbejdsliv, og undervisningen skal derfor behandle matematikholdige situationer fra såvel fritids- og samfundsliv som uddannelses- og arbejdsliv.

I forhold til fritids- og samfundsliv behandles i de yngste klasser situationer fra den helt nære omverden som fx familien, klassen, skolen og fritidsaktiviteter, således at eleverne opnår indsigt i matematikkens rolle og muligheder som beskrivelsesmiddel og analyseværktøj i forskellige situationer. Det kan være forskellige tegnemetoder til beskrivelse af omverdenen, brøker, som de møder i forskellige sammenhænge, eller diagrammer, som beskriver forskellige familiemønstre i klassen. I forhold til sigtet mod videre uddannelse behandles også rene matematikproblemstillinger, som kan danne basis for en dybere forståelse af matematik som videnskabsfag. I de yngste klasser kan det fx være navngivning og definition af geometriske figurer med en passende præcision eller simpel argumentation ud fra spørgsmål som: På hvor mange måder kan fem aber sidde i to træer? Spørgsmålet er ikke umiddelbart ren matematik, men konteksten er her valgt for at give eleverne et billede af problemstillingen, og ikke fordi det i praksis er relevant. Det centrale er således elevernes ræsonnementer i forhold til 5-summer og ikke de konkrete aber.

I løbet af skoleforløbet udvides den omverden, eleverne beskæftiger sig med, samtidig med at de i højere grad kan inddrage personlige overvejelser og stillingtagen i forhold til de problemstillinger og emner, der behandles. På mellemtrinnet kan det fx være æstetiske overvejelser i forbindelse med brug af symmetrier i logoer eller overvejelser i forbindelse med brug af forskellige diagrammer og deskriptorer til præsentation af resultaterne af en statistisk undersøgelse. I udskolingen kan det fx være brug af matematiske modeller til fordeling af midler som børnepenge og boligtilskud eller sammenligning af indkomstforhold i forskellige lande samt prognoser på baggrund af forskellige scenarier. Samtidig ændres de rene matematiske situationer til at indeholde et stadig større abstraktionsniveau, således at eleverne opnår indsigt i den måde, matematikken er bygget op på med aksiomer, definitioner, matematiske sætninger og logisk argumentation. Eleverne undersøger matematiske sammenhænge og begreber og opstiller og afprøver på den baggrund hypoteser, som de kan udvikle til matematiske sætninger med så høj en grad af præcision, som det er muligt i den konkrete situation. I enkelte tilfælde kan sammenhænge bevises formelt i traditionel matematisk forstand, i andre tilfælde kan eleverne argumentere for en påstand, fx med et antal forskellige eksempler eller ved at simulere med et digitalt hjælpemiddel og på den måde overbevise sig selv og andre om påstandens gyldighed. I geometri er der en række eksempler på simple sammenhænge, som relativt let kan bevises, fx at topvinkler har samme størrelse og at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Forud for en formel bevisførelse er det imidlertid afgørende, at eleverne selv har undersøgt sammenhængen og formuleret hypoteser, sådan at bevisførelsen behandler en geometrisk sammenhæng, de har gjort sig erfaringer med. Det er på ingen måde meningen, endsige hensigtsmæssigt, at inddrage mere komplicerede matematiske beviser i undervisningen. I stedet er det vigtigt at fokusere på bevisets stilling som et afgørende element i matematik samt på opbygningen af et matematisk ræsonnement med præmis, argument(er) og konklusion.

I fagformålet for matematik fremgår det af stk. 1, at eleverne i faget matematik skal:

"udvikle matematiske kompetencer og opnå færdigheder og viden, således at de kan begå sig hensigtsmæssigt i matematikrelaterede situationer i deres aktuelle og fremtidige daglig-, arbejds- og samfundsliv."

De matematiske kompetencer og færdigheds- og vidensområder fra de fem matematiske stofområder skal ikke ses som isolerede fra hinanden, men skal tværtimod indgå i et samspil i lærerens tilrettelæggelse af undervisningen, således som det fremgår af figur 1 nedenfor. Læreren udvælger færdigheds- og vidensområde både fra et stofområde og fra en eller to matematiske kompetencer og kan på denne baggrund formulere mål for et undervisningsforløb eller en undervisningslektion.

	Problembehandling	Modellering	Ræsonnement og tankegang	Repræsentation og symbolbehandling	Kommunikation	Hjælpemidler
Geometri og måling						
Tal og algebra						
Statistik og sandsynlighed						
Areal og rumfang						
Funktioner						

Figur 1

At udvikle matematiske kompetencer betyder at kunne udmønte matematisk viden og færdigheder i hensigtsmæssige handlinger i den mangfoldighed af situationer, som indeholder matematik. På mellemtrinnet og i udskolingen skal eleverne desuden i stigende grad kunne inddrage egen personlig stillingtagen i udmøntningen af handlinger. For eksempel kan repræsentation og symbolbehandlingskompetence komme til udtryk ved valg og brug af hensigtsmæssig repræsentationsform til præsentation af en given sammenhæng ud fra elevernes vurdering af, hvilke forhold der skal fremhæves, og hvilke der ikke er vigtige i en given situation.

Hvert færdigheds- og vidensmål kan danne ramme om flere forskellige undervisningsforløb i en klasse. De enkelte undervisningsforløb eller lektioner kan fokuseres ved at kombinere med udvalgte matematiske kompetencer. Et undervisningsforløb om decimaltal og brøker kan således vinkles forskelligt, afhængigt af om der fx fokuseres på repræsentation og symbolbehandlingskompetencen i kombination med hjælpemiddelkompetencen eller ræsonnement og tankegangskompetencen.

I praksis er det svært – og næppe hensigtsmæssigt – udelukkende at arbejde med en eller to af de matematiske kompetencer i et undervisningsforløb. De fleste kompetencer vil oftest kunne identificeres i større eller mindre omfang i et undervisningsforløb. Pointen er imidlertid fokuseringen på en eller to af de matematiske kompetencer som de væsentligste for undervisningen. Kombinationen af mål fra et stofområde og fra matematiske kompetencer kan være et redskab til at hjælpe både lærere og elever til i højere grad at være opmærksomme og holde fokus på det væsentlige i undervisningen. I enkelte tilfælde kan det være hensigtsmæssigt at tage udgangspunkt i en matematisk kompetence og kombinere med færdigheds- og vidensområder fra forskellige stofområder. Det kan fx ske i et arbejde med enkle matematiske modeller på mellemtrinnet, hvor eleverne arbejder med matematiske modeller inden for forskellige stofområder.

DE MATEMATISKE KOMPETENCER

Problembehandling

Udviklingen af problembehandlingskompetence starter i indskolingen med, at eleverne arbejder med at løse enkle matematiske problemer, som de ikke umiddelbart har rutineprægede redskaber til at løse, og derved opnår erfaringer med at arbejde undersøgende. På mellemtrinnet arbejdes der med mere komplekse problemstillinger i forskelligartede sammenhænge, så eleverne efterhånden tilegner sig forskellige strategier til løsning. På de ældste klassetrin lærer eleverne selv at tilrettelægge, strukturere og vurdere større problemløsningsprocesser.

Modellering

I indskolingen arbejder eleverne med simple hverdagssituationer, som kan beskrives ved hjælp af matematik, bl.a. ved at oversætte begge veje mellem virkelighed og matematik. På mellemtrinnet arbejdes der i højere grad med hele modelleringsprocesser, herunder specielt sammenhængen mellem matematik og virkelighed. I udskolingen arbejder eleverne med de enkelte delelementer i modelleringsprocessen fra afgrænsning af problemstilling fra virkeligheden til matematisering, matematisk analyse, oversættelse af det matematiske resultat til virkelighedssituationen og validering. Eleverne skal desuden arbejde med at identificere, analysere og kritisk vurdere anvendelsen af matematiske modeller i det omgivende samfund.

Ræsonnement og tankegang

I indskolingen skal eleverne stifte bekendtskab med kendetegnene ved det matematiske sprog gennem arbejde med enkle matematiske spørgsmål, svar og forklaringer. På mellemtrinnet arbejdes der med enkle matematiske ræsonnementer ud fra hypoteser, som eleverne selv formulerer ud fra fx undersøgende arbejde. I udskolingen arbejdes med afgrænsning mellem de enkelte delelementer som fx definitioner og sætninger samt enkle matematiske beviser, fx i geometri. Der er fokus på opbygningen af matematisk teori med forudsætninger, definitioner, sætninger og beviser frem for gennemførelse af mere komplicerede beviser.

Repræsentation og symbolbehandling

I indskolingen arbejdes der især med konkrete og visuelle samt enkle symbolske repræsentationer. På mellemtrinnet arbejdes der især med sammenhængen mellem hverdagssprog og det matematiske symbolsprog. I udskolingen fokuseres der på brugen af mere avanceret matematisk symbolsprog, specielt brugen af variable, og eleverne vurderer og vælger repræsentationsform ud fra situationen.

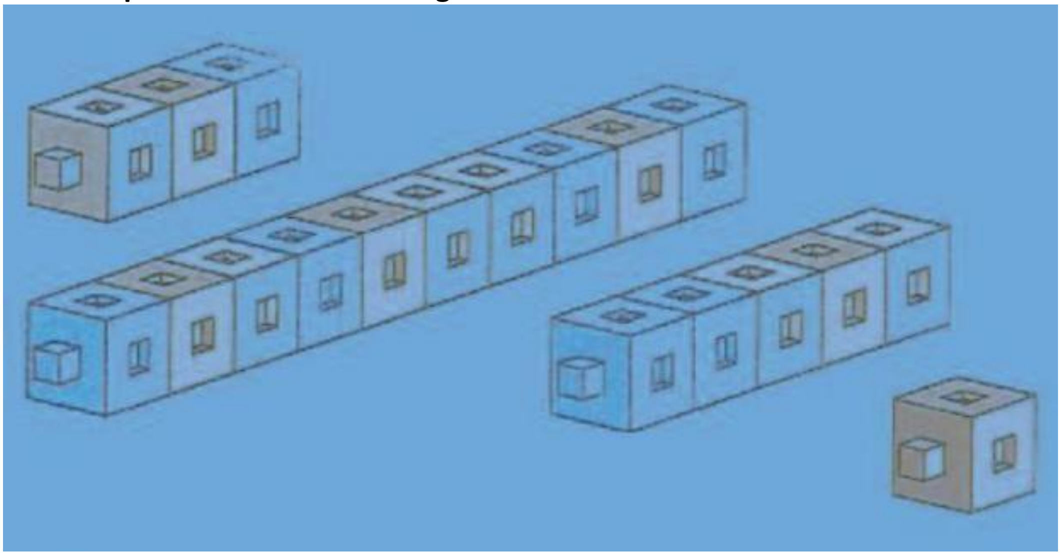
Kommunikation

I indskolingen er der specielt fokus på mundtlige og visuelle kommunikationsformer med brug af enkle fagord og begreber. På mellemtrinnet kommer der fokus på skriftsproget også, og eleverne arbejder med at forstå og udtrykke sig med et mere præcist fagsprog. I udskolingen øges denne grad af præcision yderligere, samtidig med at der kommer øget fokus på brugen af det matematiske fagsprogs begreber og notation, såvel skriftligt som mundtlig.

Hjælpemidler

I indskolingen arbejdes der med at anvende, vurdere og vælge konkrete materialer og digitale hjælpemidler som hjælpemiddel til beregninger, undersøgelser og tegning. På mellemtrinnet arbejdes der med større faglig præcision i forbindelse med arbejdet med hjælpemidler, og eleverne vælger i højere grad hjælpemiddel ud fra en konkret vurdering af sammenhængen. I udskolingen anvender og vurderer eleverne forskellige hjælpemidler til den samme problemstilling og tager derudfra stilling til muligheder og begrænsninger ved brugen af forskellige hjælpemidler.

Et eksempel: Overfladen af stænger



Lav en stang af 5 centicubes.

- Hvor stor er overfladen?
- Hvor stor er overfladen af en stang lavet af 10 centicubes?
- Hvor stor er overfladen af en stang lavet af n centicubes?

Om selve opgaven – stofområder og matematiske kompetencer

Opgaven handler om flere ting på en gang. Helt overordnet er der et problem, der skal løses: Hvordan finder man arealet af overfladen på centicube-stænger af forskellig længde? Rent geometrisk handler opgaven om overfladen af en stang. Hvad betyder overflade? Hvor stor er overfladen? Hvordan finder man den? Kan der laves en regel? Samtidig handler opgaven om at arbejde undersøgende, systematiserende og ræsonnerende. Og hvis man kaster sig ud i at finde overfladen af mange centicube-stænger, er det oplagt at finde en regel for, hvordan man finder overfladen. Nu handler opgaven altså også om at generalisere. Desuden er det oplagt at inddrage symbolbehandling, når man har fundet en regel.

Eksempler på mål for undervisningen i forhold til opgaven

Eksempler på mål inden for geometri kunne være:

- Eleverne har viden om, hvad overfladen af en rumlig figur er.
- Eleverne kan bestemme overfladen af et kasseformet polyeder.
- Eleverne kan formulere en generel regel for, hvordan man beregner overfladearealet.

Eksempler på mål inden for matematiske kompetencer kunne være:

- Eleverne kender typer af spørgsmål, der er relevante at stille, fx: Hvad vokser overfladen med, når stangen bliver 1 centicube større? Hvis overfladen på en centicube er 6, hvorfor er den så ikke 12, når stangen er på 2 centicubes? (Ræsonnement og tankegangskompetence)
- Eleverne kan finde metoder til at gå i gang med at løse problemet, fx ved at give sig til at tælle og skrive resultatet systematisk op i en tabel, samt ved at systematisere og generalisere: Den vokser med 4 hver gang og begynder med 6. (Problembehandlingskompetence)
- Eleverne kan oversætte fra hverdagssprog til symbolsprog, fx: Stangen på 5 centicubes har jo 5 mavebælter på 4 hver og så 1 i hver ende. Det bliver $5 \cdot 4 + 2$. Stangen af n centicubes må altså have en overflade på $n \cdot 4 + 2$ (Repræsentation og symbolbehandlingskompetence)

- Eleverne kan ræsonnere ud fra konkrete repræsentationer og erfaringer, fx: Overfladen er 6 på hver af klodserne, så hvis der er n klodser, skulle overfladen være 6n. Men der forsvinder jo 2 overflader, hver gang 2 centicubes sættes sammen, og det sker (n = 1) gange, så det bliver 6n – (n – 1) · 2. (Ræsonnement og tankegangskompetence)
- Eleverne kan beskrive forbindelsen mellem forskellige repræsentationer og oversætte imellem dem, fx:
  O = 4n + 2
  O = 6n – (n – 1) · 2
  Begynd med 6 og læg 4 til hver gang.

Antal centicubes	1	2	3	4	5	6
Overflade	6	10	14	18	22	26

(Repræsentation og symbolbehandlingskompetence)

LÆRINGSMÅL

De nye læreplaner indeholder kompetencemål, færdigheds- og vidensmål. Kompetencemålene er nedbrudt i færdigheds- og vidensmål i et antal faser, der svarer til klassetrinnene.

Som lærer sætter du mål for, hvad eleverne skal lære. Læringsmålene **relaterer sig til elevens udbytte** – ikke til det, der undervises i, men til det, som eleverne forventes at lære igennem undervisningen. Læringsmålene formuleres før et forløb, og gennem undervisningsforløbet justeres undervisningsaktiviteterne løbende ud fra målene.

Fra kompetencemål til læringsmål

Læreplanens færdigheds- og vidensmål nedbrydes eller omsættes af læreren til læringsmål for, hvad eleverne skal kunne ved afslutningen af et undervisningsforløb. Læringsmålene skal være konkrete og skal formuleres, så de er udfordrende, men ikke sværere, end at det er muligt for et flertal af eleverne at nå dem på et tilfredsstillende niveau.

Læringsmålene forklares for eleverne, så eleverne har en forståelse af dem. Når eleverne kender målene, kan de selv medvirke aktivt til at nå dem. Eleverne kan også selv være med til at definere målene. Læringsmålene kan med fordel gentages undervejs, så eleverne forstår sammenhængene mellem læringsmål og undervisningsaktiviteter.

Undervisningsaktiviteter

Undervisningsaktiviteterne skal sigte mod opfyldelse af læringsmålene. Som lærer vælger du aktiviteter, opgaver, indhold og processer, som kan begrundes i forhold til de opstillede læringsmål, og som eleverne samtidig finder både meningsfulde og relevante. Undervisningsdifferentiering skal sikre, at der er passende læringsudfordringer for alle elever frem mod målene.

Tegn på læring

Tegn på læring hjælper dig med at vurdere elevernes læringsudbytte. Tegn på læring kan være elevernes kommunikation om et fagligt stof, elevernes demonstration af færdigheder eller elevernes produktioner. Du definerer selv, hvordan eleverne og du som lærer kan se tegn på, at målene er nået.

Tegn på læring bruges i planlægningen af den næste undervisningssekvens eller det næste undervisningsforløb.

Evaluering
Løbende **formativ evaluering** tager udgangspunkt i og gør det muligt at reagere på de tegn på læring, som eleverne udviser. Den formative evaluering kan gennemføres af læreren, eleven selv eller af kammerater. Evalueringen sker altid i forhold til læringsmålene. Formativ evaluering er grundlaget for planlægning af det næste skridt i undervisningen.

Formativ evaluering gør det muligt at give alle elever **feedback** undervejs i et undervisningsforløb.

Eleverne bliver gennem feedback klar over:

- hvor de er på vej hen (læringsmål).
- hvad de har opnået indtil nu (læringsudbytte).
- hvad der er den næste mest passende udfordring på vej mod målet.

Evalueringsfasen skal vise, hvor godt forløbet har formået at støtte elevernes læring frem mod læringsmålet. I evalueringsfasen arbejdes som hidtil med formativ evaluering, men nu også med **summativ evaluering**. Den summative evaluering skal afklare, om det ønskede niveau er nået ved afslutningen af forløbet. Summativ evaluering afklarer således:

- hvad eleverne har lært i forløbet.
- hvad de skal bygge videre på i næste forløb.
- om der er elever, som ikke har nået det mindste acceptable niveau, og hvad der i så fald skal gøres.

Læringsmål kan ikke stå alene
At man som underviser arbejder med mål for elevernes læring er vigtigt, men det er samtidig vigtigt at understrege, at arbejdet med målformuleringer kun én didaktisk overvejelse blandt andre. Uanset hvilken didaktisk model man i sin undervisning tager udgangspunkt i, vil der også være andre faktorer, der spiller ind i elevernes læringsproces som fx elevernes læringsforudsætninger, skolens rammefaktorer og underviserens situationsbevidsthed.

TAKSONOMISKE NIVEAUER OG AFSLUTNINGSNIVEAUER

Undervisningen skal tilrettelægges således, at alle elever på alle klassetrin udfordres på de tre taksonomiske niveauer uanset elevernes forventede afslutningsniveau:

- **Niveau 1: Reproduktion**
- **Niveau 2: Anvendelse og reorganisering**
- **Niveau 3: Vurdering, perspektivering og refleksion**

I reproduktion
Dette taksonomiske niveau er det laveste niveau, og der er tale om en gengivelse og uforandret anvendelse af grundlæggende begreber, formler og regneprincipper inden for et afgrænset fagområde, uden at sammenhænge på tværs af stofområder bliver skabt.

II anvendelse og reorganisering
Dette niveau omfatter alderssvarende selvstændige forklaringer, bearbejdninger og struktureringer af et gennemgået stof og anvendelse af indlært viden og indlærte metoder på et ukendt stof i forskellige matematiske problemstillinger.

III vurdering, perspektivering og refleksion
Dette taksonomiske niveau indebærer alderssvarende bearbejdelse af komplekse matematiske problemstillinger med det mål først at opspore problemet, opvise løsningsmuligheder, konkludere og vurdere på det frembragte resultat.

I fællesskolen skal der i undervisningens tilrettelæggelse der tages højde for de overordnede tre afslutningsniveauer:

- Afslutning efter 9. klasse – Erster allgemeinbildender Abschluss (ESA)
- Afslutning efter 10. klasse – Mittlerer Schulabschluss (MSA)
- Overgangen til gymnasiet – Übergang in die Oberstufe

Under *Plan for undervisningsforløb med udgangspunkt i læringsmål* findes et forløb, der tager udgangspunkt i fagteamets overordnede plan og viser, hvordan man kan arbejde med matrixens mål og tilgodese de taksonomiske niveauer.

STOFOMRÅDER

GEOMETRI OG MÅLING

På de yngste klassetrin fokuseres på, at eleverne udvikler deres forestillinger og viden om former, størrelser og beliggenhed sådan, at de gradvist bliver bedre til at anvende geometriske begreber og til at måle længder. Arbejdet tager udgangspunkt i elevernes erfaringsverden. I det 2. trinforløb kan undervisningen gradvist tage udgangspunkt længere væk fra elevernes nære verden, når fokus rettes på deres anvendelse af geometriske metoder til fx tegning og angivelse af placering, samt beregninger af enkle mål.

Undervisningen i det 3. trinforløb har fokus på at systematisere elevernes brug af geometrien, herunder begrebsdannelsen, forskellige enheder og tegning af figurer. Et centralt punkt i arbejdet med geometri og måling er symmetri og symmetriske afbildninger som for eksempel flytning.
I undervisningen på overbygningen lægges gradvist mere vægt på undersøgelser og forklaringer på geometriske sammenhænge samt på metoder til beregninger af mål, herunder også trigonometriske beregninger.

Brudstykker fra den indledende undervisning i geometri og måling
Det er et grundlæggende træk ved læreplanen, at geometrien tager udgangspunkt i elevernes forestillinger om og beskrivelse af den omgivende verden. Herved kan arbejdet med geometrien – på samme måde som arbejdet med tallene – tage udgangspunkt i børnenes hverdagserfaringer.

I de første år arbejdes der med fysiske objekter, som gøres til genstand for manipulation, iagttagelse og drøftelse. Erfaringerne med de geometriske former og figurers størrelse kan med fordel underbygges ved at lade eleverne bygge rumlige modeller og lave figurer på et sømbræt eller i et dynamisk geometriprogram på computeren. Det kan være figurer, der ligner et eller andet, eller det kan være figurer, som skal opfylde bestemte betingelser:

- Kan du lave en firkant, som er dobbelt så stor som denne her?

Herved kan eleverne opdage, at dobbelt så stor kan have flere betydninger: Dobbelt så lange sider eller dobbelt så stor en flade. Det er lærerens opgave at give eleverne mulighed for at opdage og indse sådanne forskelle, herunder også at firkantsbegrebet ikke kun præges af rektangler. Herved kan eleverne indse behovet for at udtrykke sig mere præcist.

Eksempler på aktiviteter i første forløb kan være:

- Tegn den rute, du går til skole.
- Byg en model af dit værelse.
- Tegn det hus, du bor i.
- Find mønstre i dine omgivelser og tegn et af dem.

I dialogen kan indgå spørgsmål som:

- Hvad fortæller din tegning?
- Kan du se på tegningen, hvor langt du har til skole?
- Hvordan kan du finde ud af, hvor langt der er i virkeligheden?
- Vinduet i dit værelse er firkantet. Er der andre firkantede ting på værelset?
- Hvilke andre former har tingene på dit værelse?
- Kan du gøre din tegning dobbelt så stor?
- Hvorfor er dit mønster symmetrisk?

Eleverne arbejder med ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber, og gennem arbejdet med rumlige figurer får de mulighed for at videreudvikle deres rumlige fornemmelse.

Brudstykker fra undervisning i geometri og måling i 2. trinforløb

Forskellige aktiviteter med måling af afstand, flade, rum og vægt med ikke-standardiserede og standardiserede enheder er vigtige aktiviteter i den indledende geometriundervisning. Disse aktiviteter er det konkrete udgangspunkt for et senere arbejde med måling og beregning af længder, areal og rumfang.

Geometrien rummer mange muligheder for undersøgelser og eksperimenter. Undersøgelserne vil typisk rumme mulighed for problemløsning, fx:

- Hvor mange forskellige trekanter kan du lave på et 3 x 3 sømbræt? Hvor mange firkanter?
- Hvor mange forskellige figurer kan du bygge med 3, 4 eller 5 centicubes?
- Kan du bygge en figur, der vejer dobbelt så meget som …? Kan figuren være en kasse?

Undersøgelserne rummer ligeledes mulighed for kommunikation, fx:

- Forklar, hvorfor du mener, disse to trekanter er ens.
- Forklar, hvorfor denne figur er et rektangel.

Undersøgelserne vil ofte være ledsaget af spørgsmål, fx:

- Hvordan går det, hvis …?
- Mon det går sådan, fordi …?

Brudstykker fra undervisning i geometri og måling i 3. trinforløb

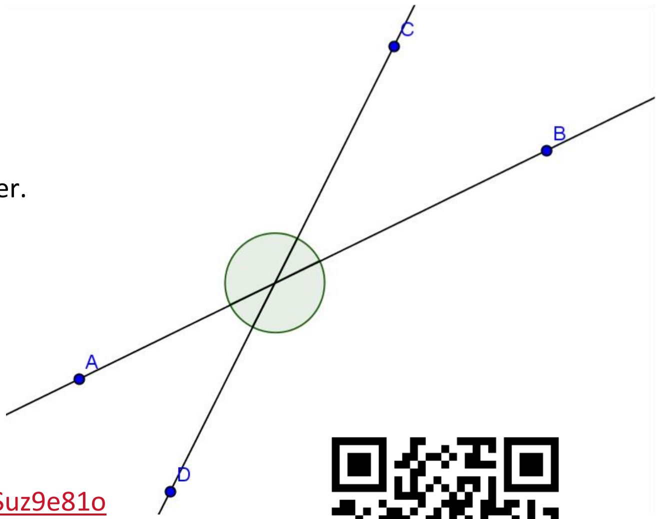
Eksemplarisk vil vi henvise til hjemmesiden www.ggbkursus.dk og www.GGBLær.dk der har mange gode vejledninger og opgaver til arbejdet med GeoGebra. Arbejdet med geometri er selvfølgelig mere end et GeoGebra-kursus, men da GeoGebra er et meget godt redskab, kommer der efterfølgende et par indledende opgaver til arbejdet med GeoGebra.

Materialesamling til arbejdet med GeoGebra:
https://www.dropbox.com/sh/p47ip8238y812h6/iVM2ppd_F8

”Vinkler” i GeoGebra

Første opgave går ud på at undersøge vinkler mellem linjer.

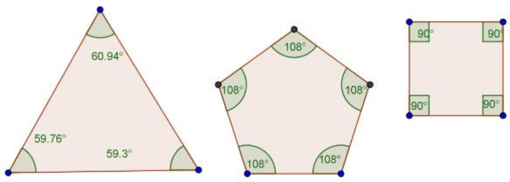
1. Lav to linjer
2. Find skæringspunktet mellem
3. Afsæt de 4 vinkler
4. Flyt punkterne og undersøg sammenhængene



Videohjælp (brug evt. din telefon) - http://youtu.be/XVhSuz9e81o

Næste opgave går ud på at se på vinkler i polygoner.

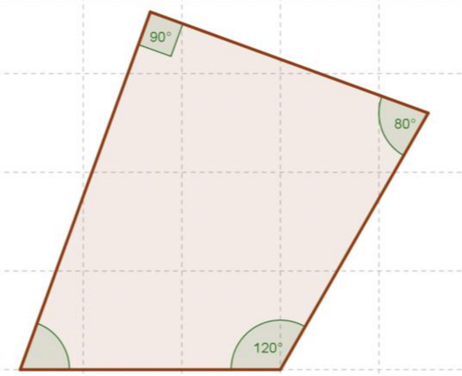
1. Lav forskellige polygoner og sæt størrelser på vinklerne



Videohjælp (brug evt. din telefon) - http://youtu.be/8yyYQneSAsE

Sidste opgave handler om selv at lave vinkler.

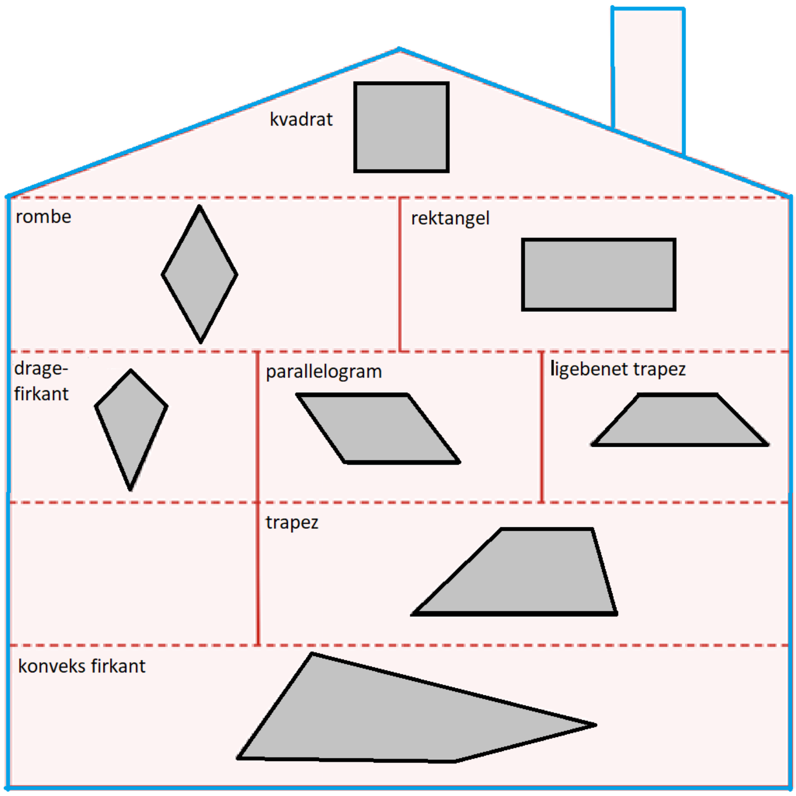
1. Først skal du prøve dig frem med knappen ”vinkel med en given størrelse”
2. Herefter skal du lave en figur med følgende vinkler:



Videohjælp (brug evt. din telefon) - http://youtu.be/sDo4KNyuH6Y

Brudstykker fra afsluttende undervisning i geometri og måling

Undervisningen skal lægge op til at eleverne får kendskab til og viden om firkanternes indbyrdes sammenhæng. Dette kan opnås ved at se nærmere på firkanterenes egenskaber, såsom symmetriakser, symmetripunkter, vinkler og sider. Med udgangspunkt i en konveks firkant kan et kvadrat, et rektangel, en rombe, et trapez, et parallelogram og en dragefirkant ud fra deres specielle egenskaber vises i en oversigt (Haus der Vierecke), se billedet nedenunder.



På billedet indsættes firkanterne i forskellige etager i et hus, således at firkanterne i en højere etage altid har de samme egenskaber og flere end firkanten/firkanterne i etagen nedenunder. For eksempel er et rektangel altid også et ligebenet trapez, et kvadrat er altid en dragefirkant, dog er et rektangel ikke altid et kvadrat.

Oversigten over firkanten er i sig selv differentierende, da dens udgangspunkt kan ligge i forskellige egenskaber for firkanterne. Eleverne kan undersøge firkanterne på forskellige planer, idet de kan undersøge siderne, viklerne og symmetriegenskaberne.

Sider	Et pat parallelle sider	To par parallelle sider		To par lige lange sider	Alle fire sider er lige lange	Diagonalerne er lige lange	Diagonalerne halverer hinanden
Konveks firkant							
Trapez							
Ligebenet Trapez							
Dragefirkant							
Parallelogram							
Rombe							
Rektangel							
Kvadrat							

Vinkler	Overfor liggende vinkler er lige store	Nabovinklerne er lige store	Alle vinkler er lige stor	Diagonalerne er vinkelret på hinanden
Konveks firkant				
Trapez				
Ligebenet Trapez				
Dragefirkant				
Parallelogram				
Rombe				
Rektangel				
Kvadrat				

Symmetri	En symmetriakse	To symmetriakser	Fire symmetriakser	Symmetrisk om et punkt
Konveks firkant				
Trapez				
Ligebenet Trapez				
Dragefirkant				
Parallelogram				
Rombe				
Rektangel				
Kvadrat				

Eksempel på en undervisningsaktivitet med fokus på Pythagoras læresætning
Aktivitet: Beregne ukendte sider/længder i forskellige figurer

Eleverne kan gennem deres valg af figurer, som kan understøttes i en dialog med læreren, vælge en passende sværhedsgrad af opgaven. Opgaverne b) og c) er hjælpespørgsmål, således at eleverne har større mulighed for at kunne løse opgaven selvstændigt. Her kunne det være en fordel at opfordre svagere elever til at indtegne hypotenusen med en farveblyant, således at arbejdet med Pythagoras læresætning bliver mere gennemskueligt.

Figurerne er differentierende i sig selv. Beregningen af diagonalen i firkanterne (hhv. firkanten) er en ligefrem anvendelse af Pythagoras læresætning. Både den ligebenede og ligesidede trekant indebærer, at elevere omstiller formlen, da højden svarer til en af kateterne.
Beregningen af siden i romben kræver flere mellemregninger for at kunne komme frem til løsningen, idet

- e og f angiver diagonalerne i romben
- e og f står vinkelret på hinanden
- e og f halverer hinanden
- ved at indtegne diagonalerne e og f dannes der 4 retvinklede trekanter
- v angiver hypotenusen som skal beregnes
- $\frac{e}{2}$ og $\frac{f}{2}$ er længderne på de to kateter

Beregningen af længden i en regulær sekskant er en opgave, som er gymnasie svarende og kræver følgende tankegang:

- i en regulær sekskant er alle sider lige lange
- en regulær sekskant er sammensat af 6 ens ligebenede trekanter (Zerlegungsaspekt)
- halvdelen af det stiplede linjestykke er højden af de ligebenede trekanter
- halvdelen af det stiplede linjestykke er den ene katete
- den anden katete har længden $\frac{x}{2}$

Arbejdsark

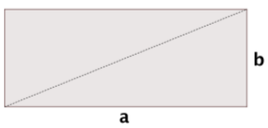
Pythagoras i figurer

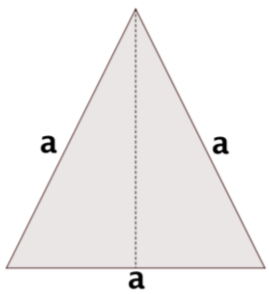
Nederst på siden kan du se seks forskellige figurer.

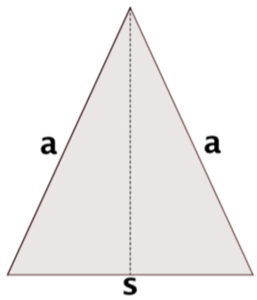
a) Navngiv alle figurer og skriv navne på linjerne.

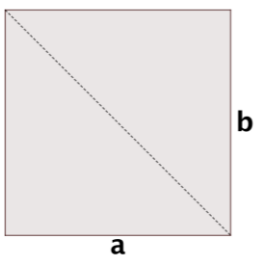
Løs efterfølgende opgaver for mindst 3 af de 6 figurer. For figurerne gælder følgende mål:
$a = 7\ cm\,;\ b = 2cm\,;\ s = 6\ cm\,; e = 8\ cm\,; f = 4cm\,, x = 3{,}5\ cm$

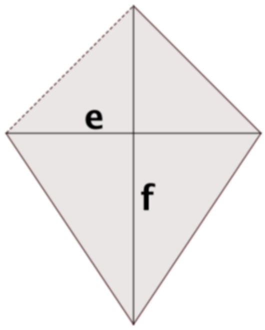
b) Indtegn den/de rette vinkler i figuren.
c) Farvelæg en retvinklet trekant i figuren.
d) Beregn længden af det striblede linjestykke.

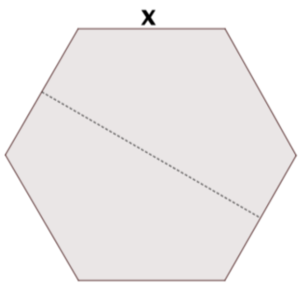










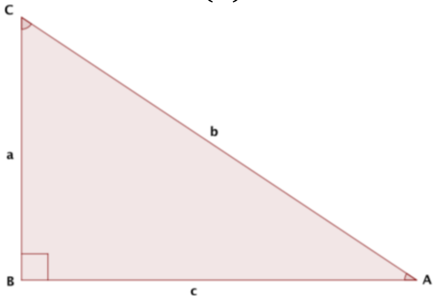
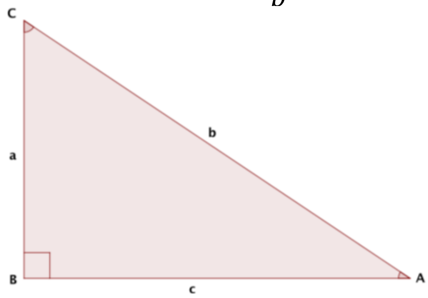
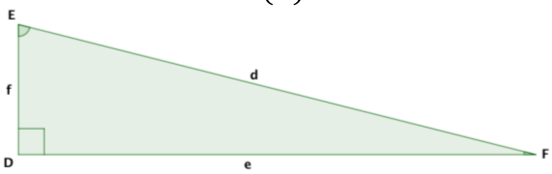
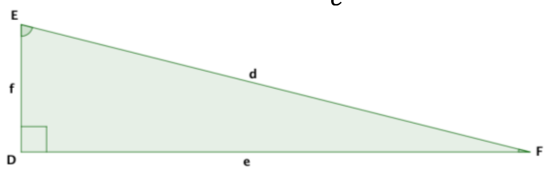
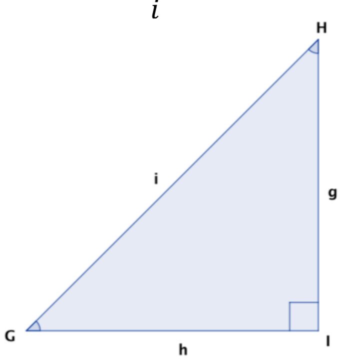
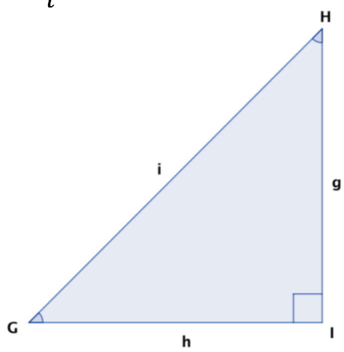


Eksempel på en undervisningsaktivitet med fokus indlæring af cos-, sin- og tangensformler i retvinklede trekanter.

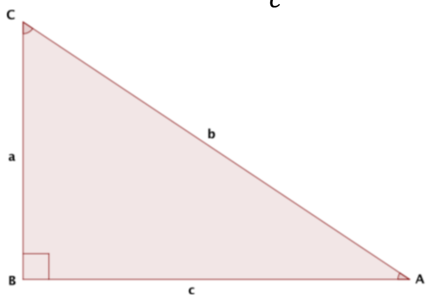
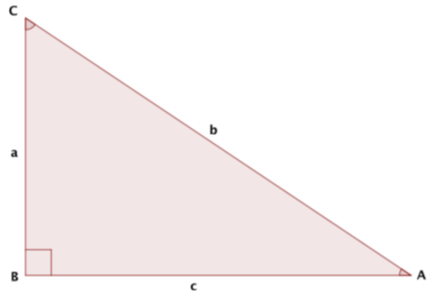
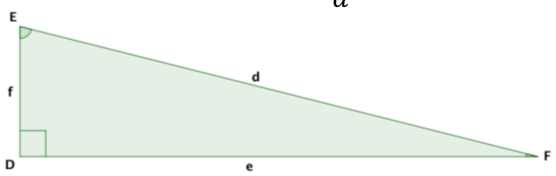
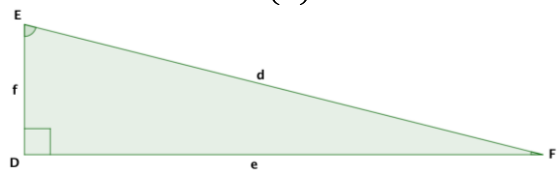
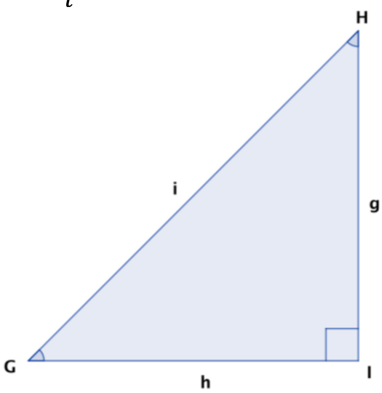
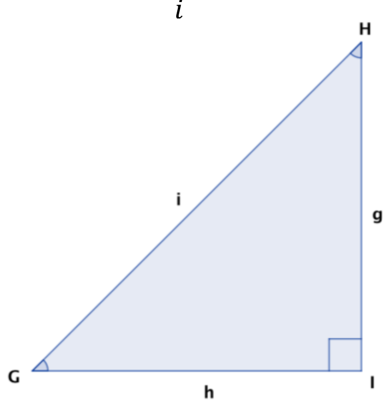
Aktivitet: Øve trigonometriske formler.

Eleverne finder sammen to og to. Eleven A får udleveret et arbejdsark A med opgaver, samt løsninger (og eventuelle mellemregninger) til samarbejdspartnerens arbejdsark B. Eleverne løser skiftevis opgaverne mundtligt.

Ark A

	Opgave for elev A	Løsninger for elev B
1)	Definer: $sin =$	$Tangens = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$
2)	$\sin(A) =$ 	$\cos(A) = \frac{c}{b}$ 
3)	$\cos(E) =$ 	$\tan(F) = \frac{f}{e}$ 
4)	$\frac{g}{i} =$ 	$\frac{h}{i} = \cos(G) = \sin(H)$ 
5)	…	…

Ark B

	Løsninger for elev A	Opgaver for elev B
1)	$sin = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$	Definer: $Tangens =$
2)	$\sin(A) = \frac{a}{c}$ 	$\cos(A) =$ 
3)	$\cos(E) = \frac{f}{d}$ 	$\tan(F) =$ 
4)	$\frac{g}{i} = \cos(H) = \sin(G)$ 	$\frac{h}{i} =$ 
5)	…	…

TAL OG ALGEBRA

Omdrejningspunktet for arbejdet med tal og algebra i indskolingen er elevernes udvikling af metoder til beregninger med naturlige tal. I 2. trinforløb inddrages også enkle brøker og decimaltal fra hverdagssituationer. I 3. trinforløb udvides talområdet til at omfatte de rationale tal, og der indføres bl.a. variabelbegrebet i tilknytning til ligninger, formler og beskrivelse af sammenhænge. I 4. trinforløb fokuseres der på reduktioner, ligninger og procentbegrebet og potenser og rødder indføres. Sidst i skoleforløbet omfatter talområdet også irrationale tal, og arbejdet med potenser og rødder fordybes. Eleverne skal blive i stand til at anvende de reelle tal og algebraiske udtryk i både praktiske og teoretiske sammenhænge.

Brudstykker af talarbejdet i de første trinforløb

Elevernes udvikling af metoder til antalsbestemmelse på de yngste klassetrin kan finde sted i en undervisning, hvor deres færdigheder og viden inden for de fire områder talbegrebet, talnavne, regnestrategier og algebra får mulighed for at spille sammen. Dette afsnit skal illustrere et sådant samspil.

I 1. klasse kan undervisning med hovedfokus på regnestrategier bl.a. bygge på problemstillinger (regnehistorier), som læreren formulerer mundtligt.

Eksempel: Albert har 7 kroner. Han får 10 kroner mere. Hvor mange penge har han nu?

Nogle elever i en 1. klasse klarer denne opgave ved at bruge tællematerialer, fx centicubes, til at repræsentere 1 krone. De tæller 7 centicubes op og lægger dem i en bunke. Derefter tæller de 10 centicubes op i en anden bunke, hvorefter de tæller alle centicubes. Denne strategi, hvor eleverne bruger tællematerialer til at repræsentere de ting, de tæller, kaldes i nogle sammenhænge direkte modellering og er samtidig et eksempel på en tæl-alle-strategi.

Andre elever i klassen bruger direkte modellering sammen med en tæl-videre-strategi. De er kommet et skridt videre i deres faglige udvikling og tæller videre fra 7, fordi de enten på egen hånd eller med støtte har opdaget, at de ikke behøver at tælle tingene i den første mængde. Et typisk næste skridt er, at eleverne tæller videre fra den største addend – altså i dette eksempel fra 10. Det forudsætter, at eleverne har indset, at addendernes orden er ligegyldig.

I eksemplerne udvikler eleverne gradvist færdigheder og viden om addition på grundlag af tællestrategier (i modsætning til udenadslære). Efterhånden kan eleverne i kraft af den viden, de opbygger igennem undervisningen, inddrage faktaviden i deres regnestrategier. Det kan fx tænkes, at en elev løser opgaven i eksemplet med hovedregning ved at tænke: Jeg ved, at 10 plus 5 er 15. Så skal jeg bare tage 2 mere. Det bliver 17. Eleven bruger en regnestrategi, der bygger på udledte talfakta.

Senere i første trinforløb kan problemstillingen udvides, så den i højere grad sigter på algebraisk tænkning:

Albert har 7 kroner. Hver uge får han 10 kroner mere. Efter 1 uge har han 17 kroner. Hvor mange penge har han efter 2 uger, 3 uger, …?

Eleverne kan ved hjælp af deres forskellige regnestrategier og evt. lærerens støtte udarbejde lister, der viser Alberts opsparing, fx 7, 17, 27, 37, 47, …

Læreren spørger, hvordan det mon fortsætter, og lægger på den måde op til, at eleverne leder efter et mønster i talfølgen.

Et svar kunne være: Det bagerste tal bliver ved med at være 7, men det forreste tal bliver hele tiden større … 1, 2, 3, 4, …

Læreren griber chancen til at introducere en tabel, der viser antal uger og antal kroner:

Uger	1	2	3	4	5	6
Kroner	17	27	37	47		

Hvor mange penge har Albert mon så efter 5 uger? 6 uger?

Eleverne får på den måde dels mulighed for at opdage nogle generelle træk ved regneoperationen +10, dels får de mulighed for at opdage endnu en sammenhæng, nemlig sammenhængen mellem antal uger og antal kroner.

Sidst i første trinforløb kan det tænkes, at indsigten vedrørende regneoperationen +10 indgår i elevernes udvikling af metoder til addition med flercifrede tal. For nogle elever kan beregningen af 48+34 foregå ved optællingen: 48, 58, 68, 78, 79, 80, 81, 82, når de støtter sig til tællemateriale, tallinje eller taltavle. Andre elever trækker på en anden indsigt, de har udviklet igennem undervisningen, nemlig at tallene kan opdeles i tiere og enere. Deres forklaring kan evt. lyde sådan: Der er 4+3 tiere. Det er 7 tiere. Og der er 8+4 enere. Det er 12 enere. Så er der 70+12=82. Endelig kan det tænkes, at nogle elever benytter sig af strategien omgruppering: 48+34. Hvis jeg lægger 2 til 48, får jeg 50. Så kan jeg trække 2 fra 34. Så får jeg 32. 48+34 må give det samme som 50+32. Det bliver 82.

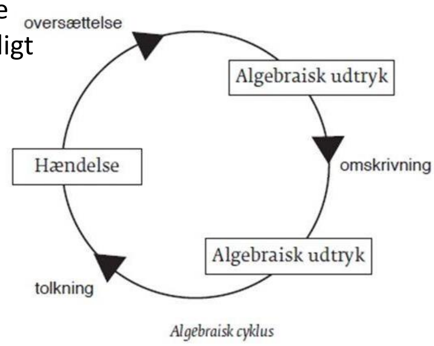
Det er hensigten med læringsmålene under tal og algebra på de yngste klassetrin, at eleverne som skitseret bl.a. får mulighed for gradvist at udvikle og forfine deres foreløbige og intuitive talforståelser og regnestrategier. Læreren spiller i den forbindelse en stor rolle med løbende at understøtte både de enkelte elevers læring og klassens fælles læringsspor, bl.a. ved at fremhæve metoder og forståelser, der bygger på indsigt i titalssystemet og i egenskaber ved de naturlige tal. Gennem hele forløbet lægges der vægt på indlæring af ordens- og mængdetal på dansk, men også på tysk.

Brudstykker af arbejdet med algebra i de sidste tre trinforløb
For eleverne skal algebra blive til et sprog, som de kan læse og forstå i forbindelse med formler og anvende i forbindelse med beskrivelse af generaliseringer og sammenhænge. Det skal blive til et redskab, der kan bruges til løsning af praktiske og teoretiske problemer.

Det er derfor ikke tilstrækkeligt at kunne rykke rundt på symbolerne ved at følge nogle bestemte regneregler. Arbejdet med algebra kan ikke ses som isolerede øvelser i bogstavregning. På den anden side bliver algebra ikke til et anvendeligt sprog eller et brugbart redskab, hvis man ikke kan omskrive symboludtryk.

Arbejdet med algebra kan ses som cirkulært. Arbejdet består af faser med:

- oversættelse af en hændelse eller en problemstilling til et algebraisk udtryk
- omskrivning af symboludtryk
- tolkning af symboludtryk (der igen knyttes til hændelsen eller problemstillingen).



Det er altså nødvendigt at kunne håndtere alle faser af den algebraiske cyklus, hvis algebra skal blive et brugbart sprog og redskab.

Eksempel: Flaskeaflevering
Dette eksempel tager udgangspunkt i, at de fleste børn på mellemtrinnet har erfaring med at få udbetalt pant, når de afleverer flasker i en flaskeautomat. Eleverne kan blive præsenteret for et fotografi af en flaskeautomat med en oversigt over de forskellige typer pant, fx:

Lille flaske: 1,00 krone.

Mellemstor flaske: 1,50 kroner.

Stor flaske: 3,00 kroner.

Der kan formuleres en række opgaver til elever på mellemtrinnet med udgangspunkt i flaskeafleveringen:

- Hvor mange penge gives fx for 3 store flasker? For 4? For 10? For 100?

Hvis opgaverne skal medføre algebraisk tænkning, kræver det, at de sigter på at generalisere. Over for elever på mellemtrinnet kan det være en ide at få dem til at forklare en generel fremgangsmåde for en kammerat:

- Hvordan vil du forklare en kammerat, hvor mange penge man får for en posefuld af de store flasker?
- Kan du skrive en fremgangsmåde, din kammerat kan bruge?
- På matematiksprog bruges der ofte et bogstav for et ukendt antal. Hvor mange penge tjener man på et eller andet antal flasker? På a flasker?

Opgaverne kan også (senere) komme til at medføre sammenligning af regneudtryk:

- Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker? Hvorfor?

$$3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$$
$$4 \cdot (3 + 1)$$
$$12 + 4$$

Hvordan ville du selv beregne, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker?

På de større klassetrin kan opgaverne komme til at omfatte algebraiske udtryk.

Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du tjener på a store flasker og a små flasker? Hvorfor?

- $a \cdot 3 + a \cdot 1$
- $a \cdot (3 + 1)$
- $4a$

Der kan også stilles opgaver, som vedrører ligningsløsning. Fx: Min kammerat afleverede 15 store og mellemstore flasker i automaten. Han fik 36 kroner for dem, men han kan ikke huske, hvor mange der var af hver slags. Kan du hjælpe?

Eleverne kan selv formulere flere opgaver til deres klassekammerater med forskellige sværhedsgrader ud fra ideen med flaskeaflevering.

Eleverne får mulighed for at arbejde med forskellige sider af algebraen i udfoldningen af opgaver omkring en flaskeautomat, og de får mulighed for at benytte kendt sprog i overgangen til matematikkens sprog.

Eksempel: Formler og ligninger i 4. trinforløb

Et eksempel på, hvordan eleverne kan arbejde med at skabe sig personlig viden i arbejdet med formler og ligninger, kunne være følgende, hentet fra en 8. klasse:

Eleverne har i de foregående år arbejdet med anvendelse af variable i mange sammenhænge, hvor der har været vekslet mellem beskrivelser i ord og ved hjælp af symboler, fx sammensat til ligninger.

Erfaringer viser, at det er et stort spring at foretage for eleverne, når de skal til at håndtere algebraiske udtryk i form af ligninger. Det generer eleverne, at de oplever, at der ikke er en bestemt metode, der altid er den mest hensigtsmæssige at benytte.

Efter en generel indledende samtale om ligninger bliver der taget hul på det mere tekniske arbejde med løsning af ligninger. Eleverne går uden nærmere angivelser af metoder i gang med selvstændigt at løse ligninger af forskellige typer, som antydet i dette uddrag:

I løbet af en lektion løser eleverne mellem 10 og 26 opgaver.

Metoderne, der bliver anvendt, er vidt forskellige. Men typisk bliver ligningerne løst baglæns.

Fx opgave 5:

Hvis (5x – 2) skal være 8, $5x - 2 = 8$ så skal 5x være 10.
Det kunne skrives sådan: $5x = 10$ hvis man så i øvrigt var klar over, at 5x var det samme som $5 \cdot x$, så var det let at se, at løsningen var: $x = 2$

I nogle opgaver skal der reduceres først. Men så kan også de løses ved overvejelser og tilbagegående regning.

Selv opgaver af denne type kan klares:

$$17y + 8 - 2y = 30 + 4y$$

Først bliver der reduceret: $15y + 8 = 30 + 4y$

Herefter bliver der ræsonneret til, fx at 15y og 4y på hver sin side af = må kunne reduceres til:

$$11y + 8 = 30$$

Hvorefter typen ligner de foregående.

Ved at bygge på forhåndskendskabet til variabelbegreb og regneregler kommer eleverne langt i det tekniske arbejde med løsning af ligninger. Da de ikke har fået præsenteret en bestemt metode, er de nødsaget til at se på den samlede symbolsammenstilling, benytte ræsonnementer, fejle og prøve igen. Dette skal ses i modsætning til et forløb, hvor nogle ligningsløsningsregler bliver præsenteret; lægge lige meget til på begge sider af lighedstegnet, flytte over på den anden side af lighedstegnet mv.

Ved den benyttede fremgangsmåde er eleverne selv med til at finde frem til metoder og regler. De er med til at opbygge deres matematiske kunnen og viden, og de får en grundlæggende metode at vende tilbage til.

Nogle elever kan med fordel fortsætte med at benytte inspektionsmetoden, hvor de gætter på et tal, som indsættes for den variable: Herefter regnes udtrykket ud for at se, om tallet er en løsning. Er tallet ikke en løsning, fortsættes med nye gæt og efterprøvninger, indtil et resultat er nået.

På et senere tidspunkt må elever og lærer drøfte betydningen af at kunne løse ligninger efter de sædvanligt anvendte metoder. Der må tages stilling til, hvilke færdigheder i ligningsløsning de forskellige elever har behov for at tilegne sig. For en kvalificeret deltagelse i 5. trinforløb er en formaliseret indlæring af de algebraiske regneregler til ligningsløsning dog nødvendig.

Grafiske metoder i koordinatsystemet må også inddrages. Fx kan løsning af ligningssystemet bestemmes ved at tegne grafiske billeder og aflæse skæringspunkters koordinater. Eksperimenterende arbejde i et computerprogram til tegning af grafer kan også give indsigt i ligningsbegrebet.

STATISTIK, KOMBINATORIK OG SANDSYNLIGHED

Arbejdet med statistik, kombinatorik og sandsynlighed skal ses i en tæt sammenhæng. I starten af skoleforløbet arbejdes der med enkel deskriptiv statistik, samtidig med at eleverne gør sig grundlæggende erfaringer med chancebegrebet ud fra intuitive overvejelser og systematiske observationer af stokastiske eksperimenter, fx i forbindelse med spil. Fokus i indskolingsforløbet er på eksperimenterende og undersøgende plan. Målet i første trinforløb er, at eleven kan forholde sig intuitiv til et simpelt spil og sandsynligheden for at vinde eller tabe.

I 2. trinforløb indføres mere komplekse diagrammer og dataopsamling der også kan strække sig over et længere tidsforløb. Samarbejde med faget natur/teknologi kunne være muligt i eksempelvis vejrobservationer. Det kombinatoriske færdigheds- og vidensmål bliver udvidet med en systematisk afprøvning. Eksperimenter uden tilbagelægning kunne være flag der skal farves forskelligt eller hvor mange volapyk ord kan der laves af udvalgte bogstaver.

I de sidste 3 trinforløb bliver arbejdet løftet op på en mere teoretisk plan. Sideløbende arbejdes der med statistiske undersøgelser af chanceeksperimenter ved simulering, og eleverne knytter beregning af frekvenser hhv. brøker til sandsynlighedsbegrebet. I 3. trinforløb skal eleverne gennemføre og præsentere statistiske undersøgelser samt analysere og tolke resultater af undersøgelser fra fx medierne og internettet. I 4. trinforløb arbejder eleverne videre med en mere kritisk stillingtagen til forskellige anvendelser af statistik både ved at gennemføre egne undersøgelser og ved at analysere og tolke præsentationer af resultater af statistiske undersøgelser. Det teoretiske (kombinatoriske) sandsynlighedsbegreb introduceres ud fra erfaringer med det statistiske sandsynlighedsbegreb samt overvejelser over udfaldsrum og tællemåder, og eleverne arbejder bl.a. med sammensatte sandsynligheder. I statistik anvendes overvejelser om sandsynligheder til at analysere og vurdere stikprøveundersøgelser. I det sidste trinforløb arbejdes der med, at kunne analysere og vurdere komplekse sammenhæng både i teori og praksis. Kombinatorik udvides til at omfatte ordnede og uordnede stikprøver både med og uden tilbagelægning.

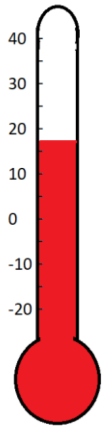
Brudstykker af arbejdet med statistik

I de yngre klasser starter arbejdet med statistik omkring indsamling af data, der vedrører eleverne selv, fx alder, højde, skostørrelser, antal søskende, antal kæledyr og fritidsinteresser, og deres nærmeste omgivelser som skolevejens længde, boligtype mv.

I 2. trinforløb interesserer eleverne sig fx for trafikken på skolevejen. Der tælles biler og andre trafikanter på forskellige tidspunkter. Datamaterialet optælles og bearbejdes i tabeller og enkle diagrammer, gerne med hjælp af en computer. I hverdagssprog formulerer eleverne, hvad man kan se af de bearbejdede data:

- Hvilke typer trafikanter er der flest af?
- Hvornår er der flest trafikanter på gaden?
- Er der forskel på, hvornår der er flest biler, og hvornår der er flest fodgængere?
- Hvorfor er det sådan?

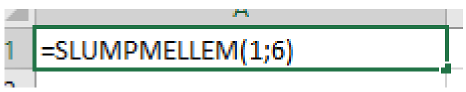
Eleverne kan også bruge indsamlede data over en længere periode til at beskrive en udvikling, fx ved at de måler deres egen højde to gange årligt gennem flere år, ikke mindst de år, hvor de vokser ekstraordinært meget. Lignende dataindsamling kan indgå i tværfaglige forløb, fx egne idrætspræstationer over tid eller dataopsamling i forbindelse med temperatur. Måden at opsamle data på kan være meget forskelligt, alt efter klassetrin. Temperaturmåling kan udformes som farvelægning af et termometer, tage billede af et termometer, nedskrivning i en tabel eller i det senere forløb arbejde kollaborativt i et fælles regneark hvor der flere steder bliver indsamlet data og produceret grafik.



Eleverne skal også arbejde med at læse andres statistiske fremstillinger. I 3. trinforløb kan eleverne fx blive optaget af et diagram fra en avis, der beskriver 12-åriges medieforbrug. Selve forståelsen af diagrammet sammenlignet med avisartiklens beskrivelse af samme kan medføre diskussioner i klassen. Eleverne kunne beslutte at gennemføre en undersøgelse af medieforbruget i udvalgte klasser. De kan udarbejde et spørgeskema, som også medtager forhold, der ikke er med i avisens undersøgelse. De indsamlede data kan bearbejdes i et regneark. En fremlægning kunne indebære en sammenligning med avisens udlægning og sammenligninger mellem piger og drenge, klasserne indbyrdes osv.

I forbindelse med projektopgaven i 9. hhv. 10. klasse gennemfører eleverne ofte spørgeskemaundersøgelser. Det er derfor oplagt i matematikundervisningen at give eleverne mulighed for at arbejde med udarbejdelse af spørgsmål, vurdering af deres kvalitet og validitet, optællingsmetoder og bearbejdning i et regneark eller et statistikprogram. Udgangspunktet for at vurdere andre statistiske overvejelser vil ofte være avisernes og andre mediers anvendelse af statistik i form af tabeller og diagrammer. For at få anvendt statistik i hverdagen kan man bruge udvalgte grupper til eksempelvis dataopsamling til atletikstævner, motionsløb, emneuge eller andre aktiviteter på skolen, hvor eleverne får et ansvar for, at det de arbejder med faktisk har indflydelse. I forbindelse med analyse af data kan datasamlingen fra Danmarks Statistik bruges for at tydeliggøre hvilke mængder af data der er tilgængeligt og for at give mulighed for at dykke ned i emner, man er interesseret i.

Da statistik og sandsynlighed hænger meget tæt sammen, kan man her inddrage simulering af statistiske data. Eksempelvis ved hjælp af regnearksfunktioner for eksempel ”slumpmellem”, der kan give et tilfældigt tal i et ønsket område.



Brudstykker af arbejdet med sandsynlighed og kombinatorik

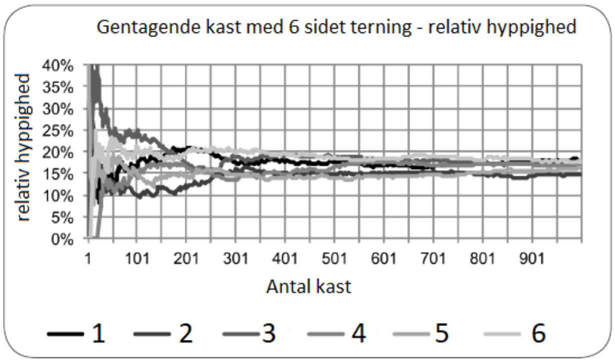
I arbejdet med sandsynlighed sigtes der på, at eleverne opnår indsigt i de forskellige måder, sandsynligheder beregnes på:

- Som personlige vurderinger, ofte af eksperter. Dette er bl.a. grundlaget for beregninger af idræts væddemål (odds / toto).
- Som en frekvensanalyse af indsamlede data (statistisk sandsynlighed). Dette anvendes bl.a. i nogle risikovurderinger.
- I et symmetrisk sandsynlighedsfelt. Dette anvendes fx i forbindelse med terningespil.
- Et eksempel på en aktivitet i indskolingen og 2. trinforløb er dyreløb på baner nummereret 2–12. Hver bane skal gennemløbes af et dyr. På bane 2 løber fx geparden, på bane 5 koen, på bane 7 sneglen, på bane 11 elefanten osv. Eleverne spiller vinderspil med skolepenge. På skift slår eleverne med to terninger, og summen af øjnene bestemmer, på hvilken bane der rykkes et felt frem. Der kan spilles flere gange, dyrene kan skifte bane, dyrene kan skiftes ud med transportmidler af forskellig art. Legen følges op med en dialog om, hvorfor det ser ud til, at banerne 6, 7, eller 8 næsten altid vinder. Gad vide, hvilke terningekast der kan give 5, 12, 2?
- Hvad nu, hvis terningerne er to forskellige farver – ændrer det chancerne?
- Hvad nu, hvis I prøver igen – bliver det de samme dyr, der vinder?
- Hvordan går det, hvis I laver rigtig mange kast?
- Hvad nu, hvis det er differensen, der bestemmer banenummeret?

Forløbet kan i det 3. trinforløb følges op med en egentlig undersøgelse af kast med to terninger med en efterfølgende statistisk bearbejdning.

- Hvis alle i klassen har slået 50 gange, hvilken sum er så hyppigst?
- Hvordan forholder det sig, hvis alle har slået 200 gange? Hvordan ser det ud, når vi har ladet fx et regneark simulere tusindvis af slag?

I 4. trinforløb kan dyreløbet følges op med at opbygge en simpel matematisk model over spilchancerne vha. enkle kombinatoriske beregninger ud fra en formodning om, at terningernes udfald opfattes som symmetriske. Eleverne analyserer og udregner sandsynligheder for forskellige chancer for at vinde i dyreløbet.



Sandsynlighed anvendes imidlertid i mange andre sammenhænge ud over i forbindelse med spil. Det er vigtigt, at eleverne – specielt i den sidste del af skoleforløbet – stifter bekendtskab med disse anvendelsesmuligheder, som er væsentlige i mange forskellige sammenhænge i det omgivende samfund. Det kan fx være forsikringsspørgsmål, vejrprognoser, opinionsundersøgelser, risikovurderinger i forbindelse med brug af nye teknologier eller chancer for helbredelse i forhold til risiko for bivirkninger ved brug af medicin.

I undervisningen i de ældre klasser indgår således behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed i mange forskellige sammenhænge. Det kan fx dreje sig om:

- stikprøveundersøgelser
- lodtrækning
- forsikring
- vejrdata
- chancespil
- ekspertvurderinger
- odds / toto.

AREAL OG RUMFANG

Første trinforløb fokuserer på, at eleverne opdager simple grundlæggende figurer med udgangspunkt i elevernes erfaringsverden. Eleverne udvikler gradvist deres forestilling om figurernes navngivning og kategorisering. I 2. trinforløb bygger undervisningen på, at eleverne får kendskab til begreberne omkreds, areal og rumfang ud fra deres erfaringer i hverdagen. I det 3. trinforløb ligger fokus på beregningen af omkreds, areal og rumfang, hvori simple formler inddrages til beregningerne. Undervisningen i dette forløb inddrager udfoldelser af kendte rumlige figurer.

Færdigheden for og viden om beregninger af omkreds, areal, rumfang og overfladeareal videreudvikles i det 4. trinforløb.

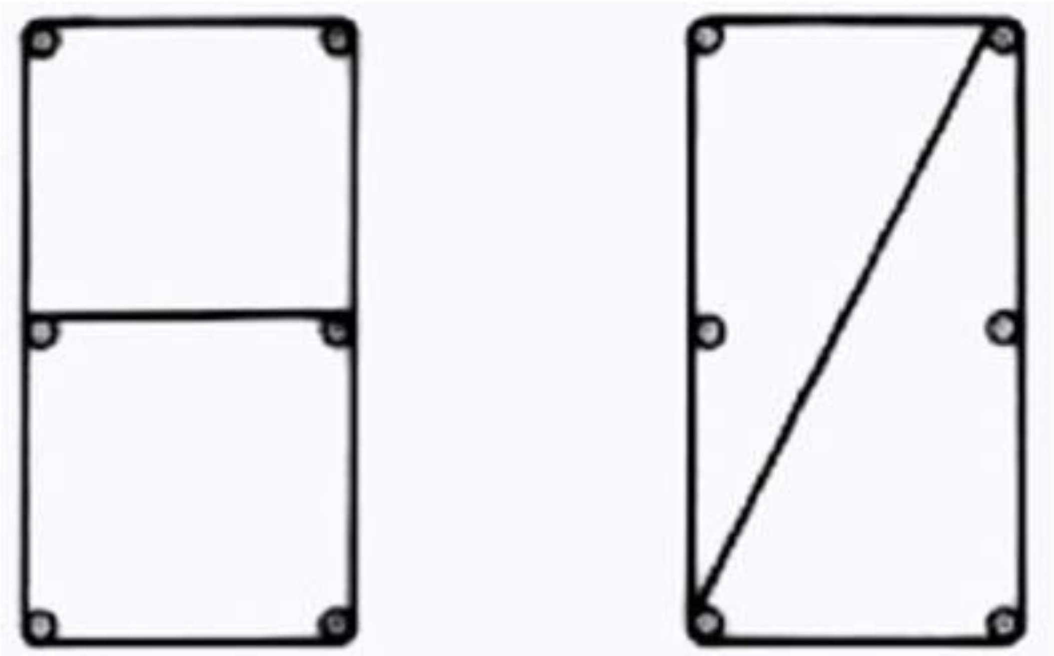
Det afsluttende trinforløb har fokus på at indføre trigonometriske arealberegninger og at anvende disse på vilkårlige figurer.

Brudstykker fra den indledende undervisning – udvikling af metoder til beregning af areal
Området er præget af formler. Der er mange, og de kan slås op, men det er afgørende for elevernes forståelse af, hvad formler betyder, at de kommer igennem nogle fundamentale erkendelsesprocesser.

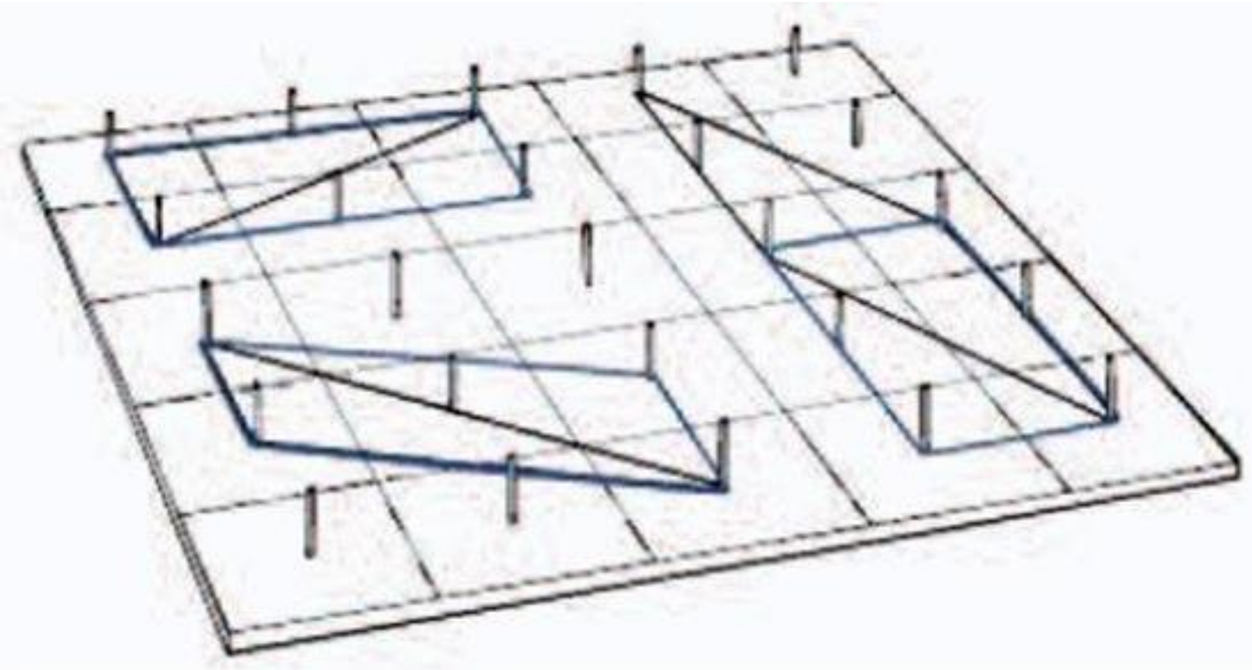
Det begynder hos de yngste elever:

- Ved at lægge to helt ens trekanter ved siden af hinanden, kan man altid få en firkant.
- Ved at lægge kvadratiske brikker på en rektangulær flade, som kan dækkes helt af brikkerne, kan man finde et tal, der beskriver størrelsen af fladen.

Det skal prøves mange gange og mødes i mange sammenhænge. Eleverne opdager, at rektangler er figurer, der direkte kan måles (med kvadrat som måleenhed), og at antallet af arealenheder kan bestemmes ved multiplikation. De fleste andre figurers størrelsesbeskrivelse kan kun forstås ved ræsonnementer.



I dette tilfælde kan eleven se, at den venstre figur er 2 stor, fordi den består af to arealenheder. Trekantens størrelse på den anden figur kan gennem ræsonnement indses at være 1. Enten fordi den er halvdelen af 2, eller fordi trekanten deles op, og delene flyttes rundt, så der dannes et kvadrat, som er 1. Nogle elever kan meget tidligt foretage denne tænkning og sætte ord på.



© Undervisningsministeriet

På tegningen herover er vist en række figurer på sømbræt. De er samlet til denne lejlighed – ikke til en samlet undervisningssituation. Men figurerne viser netop elevernes mulighed for at udvikle metoder til størrelsesbeskrivelse af plane figurer:

- Retvinklede trekanter er altid halvdelen af et rektangel.
- Parallelogrammer kan altid omdannes til rektangler med samme areal.
- Ikke-retvinklede trekanter er halvdelen af et parallelogram.

Brudstykker fra undervisningen i 3. trinforløb

Eksempel på en undervisningsaktivitet med fokus på areal og omkreds

Aktivitet: Jeg skal bygge et kolonihavehus, som er 48 kvadratmeter, hvordan kan grundplanen se ud?

Aktiviteten indledes med at indkredse begreberne kolonihavehus, kvadratmeter og grundplan i en fælles dialog. Elever og lærer taler også om, at grundplanen kan laves, så 1 centimeter på papiret svarer til 1 meter i virkeligheden. Læreren har medbragt et eksempel på en grundplan over et rektangulært hus i længdeforholdet 1 : 100, og klassen beregner i fællesskab husets areal.

Eleverne kan derefter vælge forskellige stykker papir til at tegne deres forslag til kolonihavehusets grundplan. Nogle vælger kvadratpapir, som er 1 centimeter · 1 centimeter, fordi det giver dem mulighed for at tælle sig frem til det rigtige areal. Andre vælger kvadratpapir, som er 0,5 centimeter · 0,5 centimeter, fordi det giver dem mulighed for at tegne i halve meter. Endelig er der nogle, der vælger blankt papir, fordi det giver dem større frihed til at tegne anderledes grundplaner.

Mens eleverne arbejder med deres grundplaner, har læreren mulighed for at udfordre dem på forskellige måder.

Nogle kan tegne flere forskellige rektangulære løsninger. De opfordres til at undersøge, hvor mange forskellige løsninger de kan finde, hvis husets vægge skal være et helt antal meter. Hvilke af løsningerne vil være gode at bo i?

Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst én af væggene ikke er et helt antal meter.

Nogle kan tegne løsninger, som giver huset mere end fire hjørner.

Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst en af husets vinkler ikke er rette.

Læreren bruger elevernes forskellige løsninger til at udvide aktiviteten:

Hvem kan forklare os andre, hvordan jeres hus ser ud, når vi ikke må se tegningen?

Nogle af eleverne fortæller på skift om deres løsning af opgaven. De andre elever i klassen forsøger at tegne efter deres mundtlige forklaringer. Eleverne får på den måde mulighed for at kommunikere med brug af matematikfaglige begreber:

”Væggene er parallelle 2 og 2 … Der er 4 vægge … Der er 4 rette hjørner … Huset har form som en firkant…” siger en elev.

”Hvilken slags firkant?” spørger en anden.

”Et rektangel. 2 af siderne er 8 centimeter, og de sidste 2 sider er 6 centimeter. Døren sidder…” fortsætter den første elev.

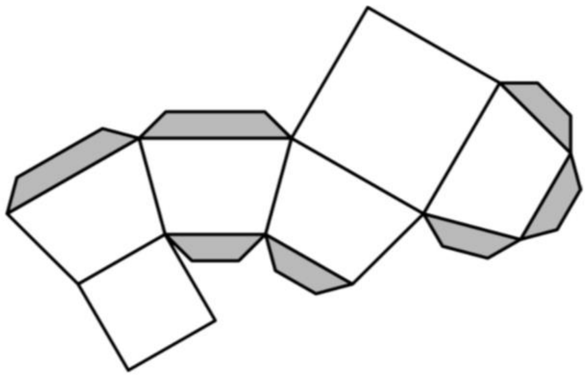
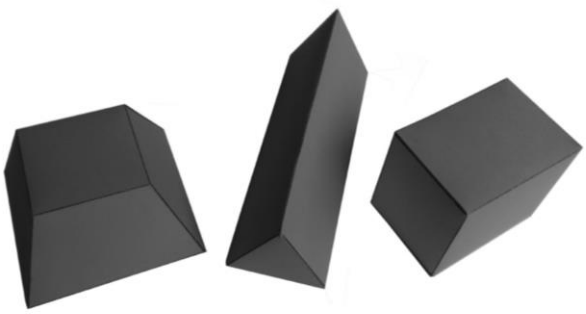
Husenes omkredse bliver også undersøgt. Når alle husene har arealet 48 kvadratmeter, har de så også samme omkreds? Hvilket hus giver den mindste omkreds?

Brudstykker fra undervisning i de sidste trinforløb

Eksempel på en undervisningsaktivitet med fokus på overfladeareal.

Aktivitet: Design (konstruere og bygge) din egen emballage, samt beregne overfladearealet.

Aktiviteten indledes med en afklaring af faglige og hverdagsbegreber, f.eks. emballage, limkanter og overfladeareal. Opgaveformuleringen lægger op til gennemførelsen på forskellige niveauer. Eleverne kan enten selv vælge et passende niveau eller i samspil med læreren finde et passende niveau.

Niveau	Opgave	
ESA	Vælg en emballage på billedet som grundlag for opgaverne.	
MSA	Vælg en emballage på billedet, som du enten forstørrer, formindsker eller varierer som grundlag for opgaverne.	
Gymnasie-overgang	Design din egen emballage.	
Opgave 1	Tegn en udfoldning af din emballage. Husk at indtegne limkanter på din udfoldning.	
Opgave 2	Beregn overfladearealet på din emballage. Limkanterne indgår ikke i beregningen. • Navngiv de forskellige figurer, som din udfoldning er sammensat af. • Nummerer alle figurer i din udfoldning. • Bestem de nødvendige mål for beregningen ved at måle på emballagen, hhv. overvej realistiske mål. • Dokumenter arealberegningerne hensigtsmæssigt, brug gerne nummereringerne fra din tegning. • Hvor stor er andelen af din tegning af hele papiret? Hvor mange procent skulle du have forstørret eller formindsket din tegning for at udnytte et helt A3 papir, et helt A4 papir, … optimalt?	
Opgave 3	Byg din emballage ud fra din tegning i et målestoksforhold 1:1	

FUNKTIONER

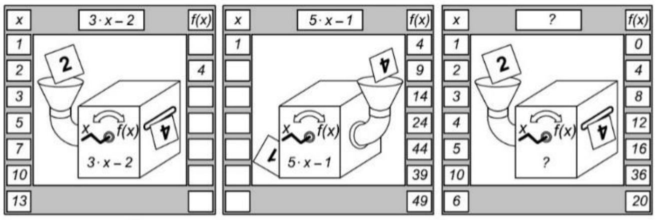
Arbejdet med funktioner foregår i et tæt sammenhæng mellem de tre repræsentantformer funktionsligning, værditabel og funktionsgraf. Der arbejdes med selve strukturen i behandling af funktioner samt modellering ved hjælp af funktioner. I modelleringen tages der udgangspunkt i den algebraiske cyklus (jf. tal og algebra). I 3. trinforløb fokuseres der på håndteringen af enkle regneforskrifter for at etablere sammenhænget mellem uafhængig og afhængig variabel. Variablerne betegnes ”x” og ”f(x)” (i modsætning til ”y” for den afhængige variabel) for at tydeliggøre afhængigheden. Eleverne lærer at opstille værditabeller og simple kurver. Arbejdet med funktioner er i denne fase tæt tilknyttet forløbet i ”tal og algebra”. I 4. trinforløb behandles specielle funktionstyper som proportionale og omvendt proportionale funktioner, førstegradsfunktioner og andengradsfunktioner. Systematiske sammenhænge for de enkelte funktionstyper (hældning, symmetri, …) udarbejdes og grundlæggende begreber (voksende, aftagende, nulpunkt, …) og regnestrategier (hældningstalsberegning, beregning af skæringspunkt, …) indføres. I 5. trinforløb udvides funktionstyperne med eksponentialfunktioner og trigonometriske funktioner. De tilhørende egenskaber (asymptotiske forhold, periodicitet) behandles. Under hele forløbet lægges der vægt på at modellere problemstillinger ved hjælp af de tilsvarende funktionstyper. Problemstillingernes kompleksitet vælges dog på en sådan måde at læringens fokus er rettet på modelleringen og beregningen med funktionerne.

Brudstykker fra undervisningen i 3. trinforløb

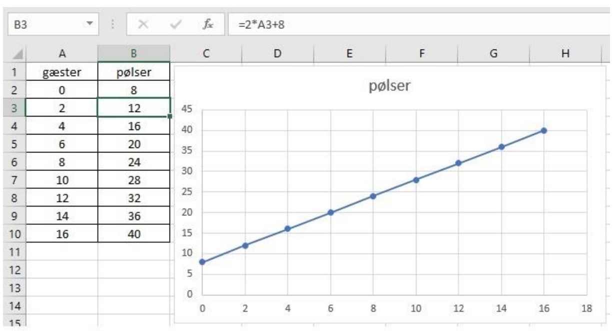
I 3. trinforløb (5.-6. klassetrin) er ”regnemaskinen” en god model for funktionstankegangen. Eleverne arbejder med regneforskrifter og udvikler en intuitiv forståelse af afhængighedsprincippet. Modellen kan bruges til at

- gennemføre ligefremme beregninger ved indsætning af tal i regneforskriften
- gennemføre inverse beregninger ved at finde ud af, hvad der skal indsættes i maskinen for at få et bestemt facit
- bestemme regneforskriften ved at kigge på forskellige par af uafhængig og afhængig variabel

I alle tre tilfælde bruges værditabeller til at nedskrive sammenhørige talpar. De tilsvarende resultater kan vises i en kurve (funktionsgraf). Regnemaskinen kan forsynes med formler opstået ved betragtning af mangfoldige hverdagssituationer, f. eks.: *familien inviterer til grillfest. Der skal bruges 8 pølser for familien og 2 pølser pr. gæst.* → f(x) = 2x + 8. De forskellige regnearter kan så inddrages i spørgsmål som: ”*Hvor mange pølser skal der købes, når man regner med 6 gæster?*” eller ”*Hvor mange gæster kan inviteres, når familien har købt 24 pølser?*” eller ”*Hvor mange pølser regner man med pr. gæst og for familien, hvis der skal købes 14 pølser ved 3 gæster og 20 pølser ved 5 gæster?*”



regnemaskinen



regneark

Resultater/værditabeller kan bearbejdes og fremvises ved hjælp af regnearksprogrammer. Her kan der så også drøftes målrettet indsats af forskellige slags diagrammer. For værditabeller vil det oftest være XY-punktdiagrammer.

Generelle overvejelser ved indføring af en ny funktionsklasse

Når en ny funktionsklasse skal indføres er følgende overvejelser hjælpsomme for planlægningen af forløbet:

- Hvilke realsituationer kan beskrives/modelleres ved hjælp af funktionsklassen?
- Hvilken er den simpleste repræsentant for funktionsklassen?
- Hvordan er funktionsligningen for denne funktionsklasse opbygget?
- Kan funktionsligningen skrives på forskellige måder (f.eks. andengradsfunktioner)?
- Hvilke fordele og ulemper har de forskellige skrivemåder?
- Hvilken betydning har de forskellige parametre i funktionsligningen?
- Hvordan kan man vise/begrunde de forskellige parametres indflydelse?
- Hvilken form har funktionsgrafen for denne funktionsklasse?
- Hvilke karakteristiske egenskaber har funktionerne i denne klasse?
- Hvordan kan man genkende disse egenskaber i funktionsligningen, funktionsgrafen og de tilhørende værditabeller?
- Hvad er de grundlæggende forskelle over for de allerede behandlede funktionsklasser?
- Hvordan kan man ud af en ”prototyp” for en funktion af funktionsklassen generere andre repræsentanter?
- Hvilken betydning har kendskabet til funktionsklassen for løsningen af bestemte typer ligninger?

Brudstykker fra undervisning der kan spænde over flere trinforløb

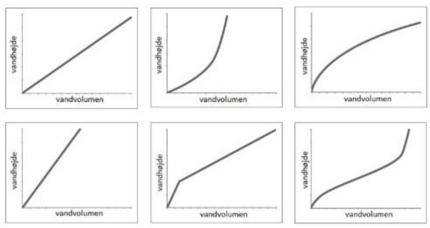
Et eksperiment til tolkning af funktionsgrafer er opfyldning af glas i forskellige former med vand.

Ved at opstille en værditabel over størrelserne ”påfyldt vandvolumen” og ”vandhøjde” kan man for de forskellige glasformer generere forskellige grafer. Denne fremgangsmåde byder på en handlende tilgang til aspekterne værditabel og funktionsgraf, dog ikke til funktionsligninger. Eksperimentet kan udbygges på forskellige niveauer.

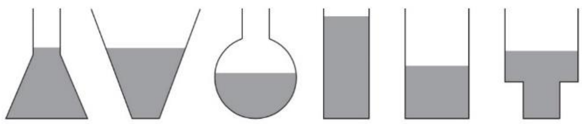
glas i forskellige former

Selve opgavestillingen kan differentieres alt efter elevens behov og færdigheder, f. eks.:

- Gennemføring med vejledning med en tabel med forudbestemte vandmængder (x-værdier) og et forudbestemt koordinatsystem
- Gennemføring med vejledning med en tom tabel og et koordinatsystem uden forudbestemt akseinddeling
- Selvstændig planlægning af forsøget og dokumentationen



forskellige glasformer og funktionsgrafer



Drøftelsen af de forskellige opstående funktionsgrafer og sammenhænget med den tilsvarende glasform fremmer forståelsen for variablernes samspil. Eleverne kan inden eksperimentet skitsere de forventede grafer og bagefter sammenligne deres prognose med virkeligheden samt drøfte forskellene. I slutningen af forløbet kan eleverne betragte andre glasformer og drøfte, hvilke grafer der vil opstå.

Denne tilgang til funktioner satser på en anskuelig forståelse af funktionsbegrebet og funktionale sammenhænge frem for en for tidlig fokusering på funktionstypers specielle egenskaber og tilsvarende beregningsalgoritmer.

Brudstykker fra undervisningen i 4. trinforløb (1. fase)

I starten af 4. trinforløb arbejdes der med ligefrem proportionale og omvendt proportionale funktioner. Arbejdet omfatter også behandlingen af regneprincippet *Dreisatz*/forholdsregning. Proportionalitetsbegrebet udarbejdes blandt andet ved eksempler og ved afgrænsning mod ikke-proportionale forhold. Dette kan ske ved betragtning af sammenhænge (antal-pris, tid-tilbagelagt vej, alder-størrelse) eller værditabeller og på et højere abstraktionsniveau af funktionsligninger eller funktionsgrafer. I den funktionale del af behandlingen ligger fokus på de ligefrem proportionale funktioner. På ESA- og MSA-niveau behandles de omvendt proportionale funktioner i et ringere omfang baseret på at indføre hyperblen som funktionsgraf gennem tegning ved hjælp af tilsvarende værditabeller og funktionsforskrifter.

Opbyggende på proportionalitetsbegrebet kan *Dreisatz*/forholdsregning indføres som en nem tilgængelig algoritme til løsning af proportionale og omvendt proportionale forholdsregningsopgaver. Tabelformen muliggør her en glidende overgang til værditabeller.

Eksempel 1 (proportional): 5 æbler koster 7,50 kr. Hvor meget koster 9 æbler?

	æbler	pris i kr.	
	5	7,50	
: 5	1	1,50	: 5
• 9	9	13,50	• 9

Eksempel 2 (omvendt proportional): 4 arbejdere skal bruge 9 timer til at grave et hul.
Hvor længe vil det tage 3 arbejdere at grave hullet?

Et fokuspunkt må være at proportionalitet kræver samme multiplikativ regneoperation og omvendt proportionalitet kræver modsatte multiplikative regnefunktioner i et skridt. Desuden kan man her også fokusere på at man ved **proportional** *Dreisatz*/forholdsregning regner ned på **enheden** (prisen for 1 æble) mens man ved **omvendt proportional** *Dreisatz*/forholdsregning beregner **helheden** (antal arbejdstimer for at grave hullet) i mellemskridtet.

	antal arbejdere	tid i timer	
	4	9	
: 4	1	36	• 4
• 3	3	12	: 3

Differentiering kan på grundlag af algoritmens lette tilgængelighed foregå i selve opgavestillingens abstraktionsniveau og talmaterialets kompleksitet.

Eksempel 3 (proportional uden lommeregner): 63 Euro svarer til 477,40 danske kroner.
Hvor mange kroner svarer 45 Euro til?

Her ville man i mellemskridtet ikke kunne regne præcis ned på enheden, derfor anbefales det at tage de to eurobeløbs største fælles divisor som mellemskridt.

	EUR	DKR	
	63	477,40	
: 7	9	68,20	: 7
• 5	45	341,00	• 5

Regneprincippet *Dreisatz* har sin oprindelse i tysk tradition for regnealgoritmer og forekommer i denne form ikke i danske læremidler men kan sammenlignes med forholdsregning. *Dreisatz* er dog et væsentligt princip for elevernes tilgang til at forstå matematikken i videreførende uddannelser i det tyske system. Der henvises til tyske læremidler for 7. klassetrin til inspiration. Desuden indeholder de ældre eksamenssæt (se IDA), her især ESA, en del nemt tilgængelige *Dreisatz*-opgaver på dansk.

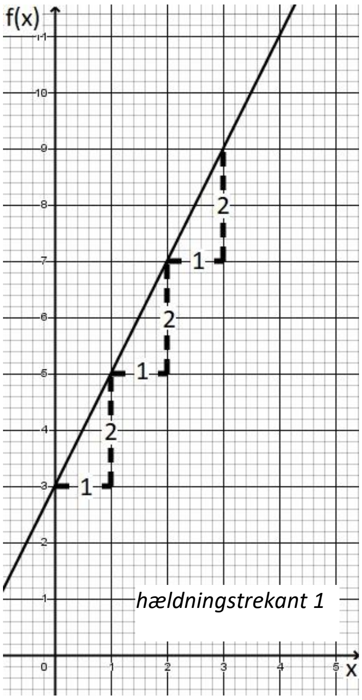
Brudstykker fra undervisningen i 4. trinforløb (2. fase)

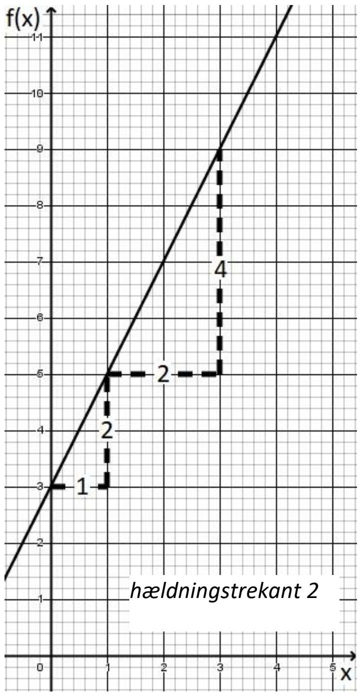
I 4.trinforløbs anden fase fokuseres på arbejdet med førstegradsfunktioner. Her kan man gribe tilbage på eksperimenterne omkring opfyldning af glas idet cylindriske glas med en målbar tyk bund vil give en førstegradsfunktions graf som kurve. Gennem betragtning af vandstandens udvikling ved påfyldning af en passende stor volumenenhed vand (ved større glas nok 1 dl – ved mindre glas 1 cl) kan man lægge grundlag for hældningstalsbegrebet. Den konstante værdi ”b” udgøres af bundens tykkelse.

Eksempel: et cylindrisk glas med en grundflade på 50 cm^2 og en 3 cm tyk bund fyldes med vand

$f(x) = 2x + 3$

x / dl	f(x) / cm
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11





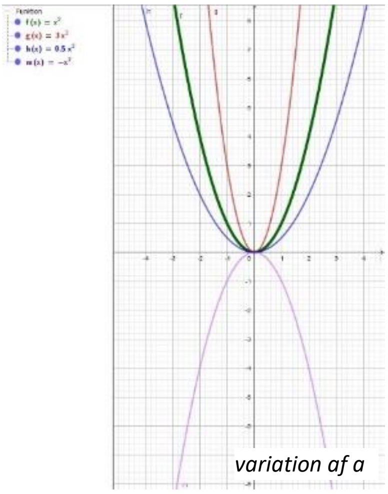
På ESA-niveau kan der arbejdes med hældningstrekanter, der viser at f(x)-værdien stiger med ”a” (i eksemplet 2) hver gang x-værdien stiger med 1 (figur: hældningstrekant 1). På MSA- og gymnasieniveau kan der allerede her lægges grundlag for forståelsen af beregningsformlen for hældningstallet idet man også betragter større stigninger i x-værdien og den tilsvarende f(x)-stigning og danner kvotienten ($\frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$) (figur: hældningstrekant 2).

Der kan arbejdes med eksempler på takster med et grundbeløb (taxa-kørsel, el-regning, …), hvor ”b” identificeres som grundbeløbet mens hældningstallet ”a” er det forbrugsafhængige beløb. På gymnasie-niveau tilstræbes der ud over det en mere abstrakt forståelse af selve funktionsklassens egenskaber.

De forskellige taksonomiske niveauer tilgodeses ved opgavestillingerne, startende med en handlende tilgang som f.eks. i måling af vandhøjde i det foregående eksempel, som så omsættes til værditabel og funktionsgraf. På de videreførende niveauer arbejdes der med funktionsforskrifter og opstilling af værditabel og funktionsgraf på dette grundlag samt betragtning af mere komplekse sammenhæng mellem problemstilling og forskrift og mere abstrakte betragtninger af de funktionale sammenhænge.

Brudstykker fra undervisningen i 4. trinforløb (3. fase)

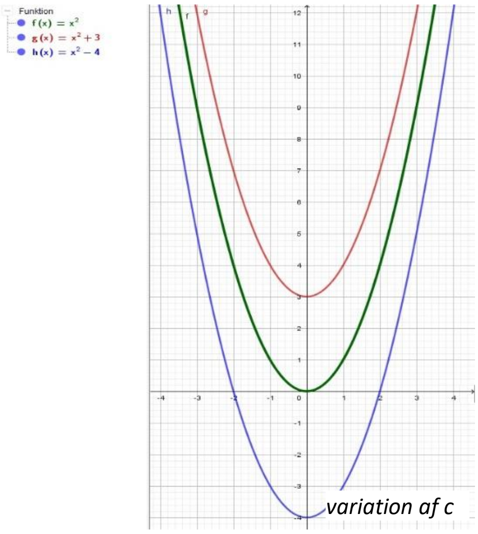
I 4. trinforløbs 3. fase fokuseres der på MSA- og gymnasieniveau på andengradsfunktioner.



variation af a

Da eksempler på andengradsfunktioner i funktionale sammenhænge oftest har ret komplekse problemstillinger som grundlag, vil fokus på MSA-niveau ligge mere på anvendelsen af funktionsgrafens form – parablen – i fx byggeværker eller bevægelseskurven ved kast af genstande. På dette niveau arbejdes med begreberne diskriminand, toppunkt, nulpunkter/skæringspunkter med x-aksen, skæringspunkt med y-aksen og symmetriakse.

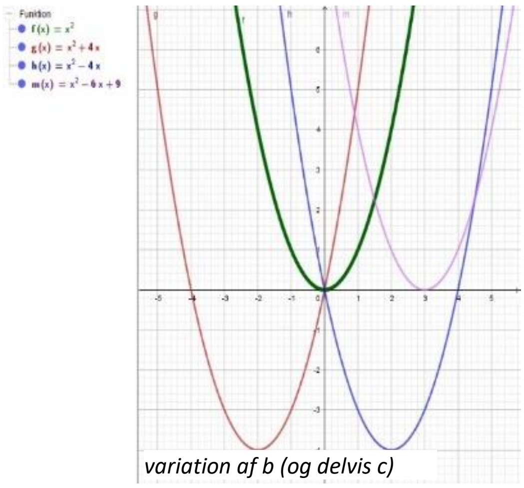
Funktionsklassen kan indføres via en matematisk adgang over opstilling af værditabeller og tegning af funktionsgrafen for den simple andengradsfunktion $f(x) = x^2$ – for det første manuelt. I det følgende forløb arbejdes der med at indføre og variere koefficienterne a, b og c i funktionsforskriften og betragtning af deres indflydelse på grafens form og beliggenhed. I denne sammenhæng kan funktionsplottere bruges med fordel. I denne fase udarbejdes også diskriminandbegrebet samt toppunktsberegninger og diskriminandens fortegns betydning for antallet af nulpunkter. Funktionsgrafens symmetri er et andet vigtigt aspekt især ved opstilling af værditabeller og manuel tegning af grafen.



variation af c

Beregningsalgoritmer til beregning af nulpunkterne kræver løsningsmuligheder for andengradsligninger (se ”tal og algebra”), hvor det på et højere taksonominiveau er vigtigt at skelne mellem løsningsalgoritmen for ligningen (løsningsformel) og proceduren til beregning af nulpunkter (sætte funktionsligningen lig med 0), da denne også bruges ved alle andre funktionsklasser.

I den videreførende behandling fokuseres der på MSA-niveau på modellering ved hjælp af andengradsfunktioner. Eksempler her er brobuer, boldkast, springvand, antikke bygninger. Modelleringen indeholder både beregninger ved hjælp af en given funktionsligning og opstilling af funktionsligningen ud fra givne oplysninger, her oftest ved hjælp af tre punkter, hvoraf det ene er skæringspunktet med y-aksen (fremgangsmåde: c bestemmes ved hjælp af skæringspunktet med y-aksen, a og b ved opstilling og løsning af et ligningssystem med 2 ubekendte) eller toppunkt og to nulpunkter (fremgangsmåde: først nulpunktsform ved hjælp af nulpunkterne, dernæst bestemme a ved at indsætte toppunktets koordinater).



variation af b (og delvis c)

På gymnasie-niveau kan der ud over dette arbejdes med mere funktionale sammenhænge som fart-bremsevejsbetragtninger eller (på meget højt niveau) tid-sted-diagrammer i den jævnt accelererede bevægelse.

Funktionsklassens egenskaber kan udvides med toppunktsformen ved at omskrive $f(x) = ax^2 + bx + c$ til formen $f(x) = a(x-d)^2 + e$, hvor $(-d;e)$ er toppunktet – dette kræver faktorisering ved hjælp af kvadratsætningerne (se tal og algebra).

Der kan i denne sammenhæng også betragtes polynomfunktioner af højere grad (typisk tredjegradsfunktioner) og systematiske sammenhænge mellem polynomiets grad og maximalt muligt antal nulpunkter samt nulpunktsformen for almene polynomfunktioner:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots$, hvor x_1, x_2, x_3 osv. betegner nulpunkterne.

Brudstykker fra undervisningen i 5. trinforløb

I 5. trinforløb arbejdes der med eksponentialfunktioner og trigonometriske funktioner samt uddybelse af værktøjerne til beskrivelse og undersøgelse af funktioner. På MSA-niveau fokuseres på funktionernes anvendelse mens gymnasieniveauet kræver en mere systematisk tilgang som opstart til funktionsundersøgelsen i gymnasieoverbygningen.

Eksponentialfunktioner behandles i sammenhæng med eksponentiel vækst, som eksempler kan her bruges rentesrente, populationsudvikling, radioaktivt henfald, … Eksponentialfunktioner er velegnet til at fordybe kendskabet til beskrivelse af funktionernes monotoni (voksende og aftagende) og asymptotiske forhold. Begreberne fordoblings- og halveringstid indbyder til en tværfaglig drøftelse i sammenhæng med halveringstiden for radioaktive isotoper i fysikundervisningen. Beregninger med eksponentialfunktioner kræver delvis anvendelse af logaritmer. Disse behandles i denne sammenhæng på et lavt niveau som notationsmåde i løsningen af eksponentialligninger – logaritmefunktioner som sådan skal ikke nødvendigvis undersøges.

De trigonometriske funktioner f(x) = sin(x), f(x) = cos(x) og f(x) = tan(x) indføres ved hjælp af betragtninger omkring enhedscirklen. Her udarbejdes begrebet periodicitet gennem gentagelsen efter en ”runde” i enhedscirklen (360° hhv. 2π). Sinuskurven som funktionsgraf er kendt fra vekselspænding i fysikken, også her er der mulighed for tværfaglige indsatsområder. De skiftende monotoniforhold lægger op til samtidig at indføre begreberne ”lokalt minimum” og ”lokalt maksimum” (lokale ekstrema). På gymnasieniveau indføres buemålet ”radianer” som mål for vinkler og de trigonometriske funktioner behandles på den tilsvarende basis.

I undersøgelsen af funktioner indgår strategier til beregning af skæringspunkter med y-aksen (indsætte x = 0 i funktionsligningen) og nulpunkter (sætte funktionsligningen lig med 0) samt symmetribetragtninger. Monotoniforhold, lokale ekstrema og asymptoter behandles på et kvalitativt niveau, da de tilsvarende systematiske beregninger oftest kræver kendskab til differentialregningen, der først indføres i gymnasieoverbygningen (undtagelse: parablers toppunkt). De forskellige funktionsklasser undersøges også med henblik på deres reaktion ved overgangen fra f(x) til f(x) + c, c · f(x), f(x + c), f(c · x), f(-x) og -f(x). I denne sammenhæng undersøges på gymnasieniveau også den almene trigonometriske funktion f(x) = a · sin(b · x + c) + d med henblik på parametrenes betydning, her udarbejdes bl.a. sammenhænget $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. I disse undersøgelser anbefales anvendelsen af et dynamisk geometriprogram som funktionsplotter.

FAGTEAMETS OVERORDNEDE PLAN

Fagteamets overordnede plan er udfyldt med enkelte eksempler og er ikke en færdigudfyldt plan. Den kan udfyldes med udgangspunkt i forskellige tilgange. En mulig tilgang er at tage udgangspunkt i stofområderne og således fordele de enkelte emner i årgangene (eksempel med geometri og måling). En anden mulig tilgang er at fokusere på progressionen i de enkelte emner, som også kan være på tværs af stofområderne (eksempel med brøker/procent/eksponentialfunktioner).

Det er op til fagteamet at fastlægge hvor detaljeret punktet ”undervisning” skal være udfyldt, dog skal alle stofområder tilgodeses.

VEJLEDENDE FORSLAG TIL FAGTEAMETS OVERORDNEDE PLAN – 7.-10. ÅRGANG

	5. årgang	6. årgang	7. årgang	8. årgang	9. årgang	10. årgang
Undervisning: Geometri og måling	Figurer Tegning Vinkler Udfoldninger Spejling Forskydning Drejning	Koordinatsystem Målestok Vinkelberegning Beregning med enheder Tegning og undersøgelse af rumlige figurer	Geometriske konstruktioner …	Firkanternes hierarki …		Trigonometriske beregninger …
Undervisning:			Reduktion og ligninger af 1. grad			
Undervisning:			Proportionalitet og "Dreisatz"			
Undervisning:			1. gradsfunktioner			
Undervisning:			Arealberegning af trekanter og udvalgte firkanter			
Undervisning: Brøker, procent, eksponentialfunktion	Brøkbegreb	Procentbegrebet som hundrededele	Procentregning, procentsats, procentværdi, grundværdi	Procent moms, stigning og fald/rabat	Procent Gentagende procenttilskrivning Rentes rente / vækstformel	Eksponentialfunktion
Differentiering	Selvdifferentierende opgaver med forskellige sværhedsgrader…			Niveaudeling i perioder…		
Fagsprog/ sproglig udvikling		Fagbegreber og førfaglige ord omkring brøker under hensyntagen til hverdagssituationer…				
IT og medier	Geogebra…		Geogebra Regneark BYOD indføres…			

Innovation og entreprenørskab				Deltage i Pengeugen.dk…		
Kulturforståelse		Andre talsystemer bl.a. romertal…				Historierne bag tallene pi og e…
Hjælpemidler og materialer			Lommeregneren introduceres Passer Geometri-trekant Formelsamling …			
Evaluering		Fremstille et matematisk orienteringsløb. …			Oplæg om Pythagoras læresætning. 2 klasseprøver på tværs af stofområderne. Fremstille en video-vejledning til et valgt emne …	

ÅRSPLAN – SKABELON

Undervisningsdifferentiering – fx:

- Undervisningen tilpasses elevgruppens forskellighed inden for klassens fællesskab ud fra indhold, metoder, organisation og materialer.
- Der sættes tydelige mål for året, forløb og undervisningslektion. Eleverne inddrages i evaluere og sætte mål for egen læring.
- Arbejdets organisering veksler mellem klassegennemgang, gruppe- og pararbejde ud fra Cooperative Learning-strukturer samt individuelt arbejde. Den stramme organisering afbrydes med jævne mellemrum af faser, hvor eleverne skal arbejde selvstændigt og selv organisere arbejdet.
- Der lægges vægt på en formativ evaluering; skriftlige opgaver afleveres fortrinsvis den digitale samarbejdsplatform, så eleven kan få feedback i selve skriveprocessen. Der arbejdes med førtest i forhold til prøver, så der kommer fokus på progressionen. Efter prøver m.m. laves der opgaveark ud fra klassens og elevens individuelle fejltyper.
- Eleverne involveres i deres egen læring, fx ved at skulle evaluere sig selv og undervisningen, ved at sætte individuelle læringsmål, ved at have fokus på progression, og ved at have valgmuligheder ved bestemte emner og opgaver.
- Der mængde- og dybdedifferentieres i forhold til materialer og opgaver, ligesom læsesvage elever kan bruge oplæsningsprogrammer, som fx Appwriter, eller lydfiler.

Årsplanen er udarbejdet i samarbejde med...

Emne og periode	Kompetencemål	Videns- og færdighedsområder	Læringsmål	Tiltag Hvilket indhold, materialer, metoder og organisering?	Evaluering Hvilke evalueringsværktøjer skal anvendes? Hvad skal evt. være prøve eller prøvelignende bidrag?

OPMÆRKSOMHEDSPUNKTER

I tilknytning til nogle få af færdigheds- og vidensmålene er der formuleret såkaldte opmærksomhedspunkter. Et opmærksomhedspunkt er en beskrivelse af den mindste grad af målopfyldelse i forbindelse med udvalgte færdigheds- og vidensmål, som er en forudsætning for, at eleverne kan få tilstrækkeligt udbytte af de efterfølgende klassetrin. Læreren skal være særlig opmærksom på, om eleverne opnår grundlæggende viden og færdigheder. Opmærksomhedspunkterne kan således støtte matematiklæreren til at vurdere, hvornår en elev har brug for særlig opmærksomhed. Hvis en elev ikke opfylder den grad af målopfyldelse, der er udtrykt i et af opmærksomhedspunkterne, må matematiklæreren på denne baggrund indlede en dialog på skolen med skolelederen og andre ressourcepersoner om at iværksætte den nødvendige indsats for at sikre elevens fortsatte faglige udvikling.

Opmærksomhedspunkterne er knyttet til 2. klassetrin, 4. klassetrin, 6. klassetrin og 9. klassetrin – i alt ni opmærksomhedspunkter. Klassetrinnene indikerer, hvornår i skoleforløbet det forventes, at eleverne som minimum har opfyldt den beskrevne grad af målopfyldelse. Det er imidlertid hensigtsmæssigt at iværksætte en indsats så tidligt som muligt i forhold til de elever, der ser ud til ikke at kunne opfylde den mindste grad af målopfyldelse på de angivne klassetrin. I forbindelse med de tre opmærksomhedspunkter i 4. trinforløb er det naturligvis kun en mulighed at iværksætte en indsats, før eleverne forlader skolen.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at der kun er formuleret opmærksomhedspunkter i tilknytning til udvalgte færdigheds- og vidensmål inden for et afgrænset område af stof- og kompetenceområderne. Opmærksomhedspunkterne er især formuleret i tilknytning til de færdigheds- og vidensmål inden for tal og algebra, som har særlig betydning i det senere skoleforløb, herunder i undervisningen inden for andre af skolens fag og i elevens hverdagsliv. Opmærksomhedspunkterne er således ikke udtryk for, hvilke mål der er vigtigst, og en elevs arbejde med matematik kan ikke reduceres til udelukkende at rette sig mod opmærksomhedspunkterne. Alle elever skal arbejde med alle mål.

TVÆRGÅENDE TEMAER

SPROGLIG UDVIKLING

I det følgende fokuseres der på det element af elevers sproglige udvikling i matematik, der ofte omtales som faglig læsning.

I matematikundervisningen skal eleverne både lære at afkode og læse tekster af autentisk karakter, hvori matematik indgår som redskab til formidling, og tekster, som skal understøtte deres matematiklæring. I forbindelse med den sidstnævnte type tekster skal eleverne bl.a. udvikle færdigheder i at afkode og læse matematiske problemstillinger. Herunder indgår elevernes færdigheder i at finde og aflæse relevant information.

At læse handler dels om at afkode ordene i en tekst, dels om at forstå det læste. Læsning er en aktiv proces, hvor eleverne møder matematikteksten med deres forhåndsviden om det givne indhold i teksten. Når elevernes forhåndsviden aktiveres, kan der skabes mening og sammenhæng i den læste teksts informationer. En af de faktorer, der har størst betydning for, hvad elever forstår og husker af det læste, er den forhåndsviden, som de møder teksten med. Teksten bliver meningsfuld, når eleverne formår at knytte indholdet til det, som allerede vides om emnet. Dermed bliver det muligt for eleverne at danne mentale billeder af det læste. De mentale billeder gør det muligt at tænke matematik og udvikle begrebsforståelse.

Det er altså vigtigt, at elevernes forhåndsviden aktiveres i mødet med teksten, men det er ikke nok blot at aktivere denne viden, eleverne må også være i stand til at navigere rundt i teksten og finde sammenhæng mellem informationer på tværs af teksten og ræsonnere på baggrund af den viden, de i forvejen har med sig. For at vælge en hensigtsmæssig læsestrategi til dette er det en hjælp at have kendskab til genren. Et væsentligt spørgsmål er derfor, hvad der kendetegner tekster, der handler om matematik? Det er ikke realistisk at forestille sig, at alle matematiktekster kan karakteriseres på samme måde, men der er nogle kendetegn, som elever møder ofte i tekster om matematik.

Et væsentligt træk ved matematiktekster er, at de ofte består af andet end skrevne ord – det er altså tekster, der er sat sammen af forskellige dele, fx matematisk symbolsprog, skemaer, tabeller, diagrammer, figurer, huskekasser, faktakasser, fotos, tegninger m.m. De skrevne ord kan have forskellige funktioner. Det kan være berettende fortællinger, opgaveinstruktioner, ordforklaringer m.m. Der er vigtige fagudtryk, som eleverne skal kende, men der er også visse ordsammensætninger, som bruges på en bestemt måde i faget. Eksempler kan være større end, mindre end, hvis og kun hvis ... Ligeledes har illustrationerne forskellige funktioner. Nogle skal gøre siden læsevenlig, mens andre illustrationer kan indeholde vigtige informationer eller måske ligefrem en instruktion. Det kan altså være et kompliceret, men spændende landskab at bevæge sig rundt i for eleverne.

Hvis matematikundervisningen tager udgangspunkt i en bestemt matematikbog, kan det være en stor hjælp for eleverne at arbejde med, hvad der kendetegner matematikteksterne i netop denne bog. Det er med til at give eleverne en hensigtsmæssig læsestrategi at være bevidst om, hvordan matematikbogen er bygget op. Det kan være, at bogens kapitler indeholder forskellige sidetyper, at bestemte sider altid er bygget op på en bestemt måde, at vigtige informationer er placeret et bestemt sted osv. Derudover må læreren hjælpe eleverne til at blive bevidste om, at ordene ofte ikke skal læses alene, men skal sammenkædes med en illustration, en tabel, en graf eller lignende, ligesom elementerne kan have forskellig status. Rækkefølgen, de enkelte dele læses i, kan også være væsentlig. I matematiske tekster med figurer, skemaer, tabeller, grafer og lignende skal man ikke nødvendigvis altid læse alle informationerne. Her er det derfor vigtigt at vide, hvordan informationerne er organiseret, så man har mulighed for at finde de informationer, der er vigtige. Det bliver dermed helt centralt at kunne vælge en læsestrategi, der er hensigtsmæssig.

Når eleverne læser i matematik, er hensigten for det meste, at de skal løse en opgave, altså ligner det andet hovedformål med faglig læsning i matematik. For at kunne løse en opgave må man vide, hvad problemstillingen er. Mange lærere møder elever, der spørger: "Hvad skal man i den her opgave?" Det kan altså være vanskeligt for elever at identificere, hvad problemstillingen egentlig er. Her må læreren passe på med ikke altid blot at give elever forklaringer – hvis eleverne skal udvikle deres kompetence i faglig læsning af matematiske tekster, bliver de nødt til at arbejde med at udvikle hensigtsmæssige strategier. Læreren kan gå i dialog med eleverne om opgaven eller opfordre eleverne til at gå i dialog med hinanden med spørgsmål som: Prøv at fortælle med jeres egne ord, hvad der står. Hvilke oplysninger giver teksten jer? Hvor står spørgsmålet henne? Hvad får I at vide? Kan I lave en tegning af problemstillingen? Når eleverne med egne ord formulerer sig om problemstillingen, har de mulighed for at danne mentale billeder af problemstillingen og dernæst vælge en løsningsstrategi, der er hensigtsmæssig. Eleverne må som aktive læsere forholde sig aktivt til problemstillingen – her er det vigtigt at kunne reflektere over problemstillingen, evt. lave et overslag og reflektere over svaret i forhold til spørgsmålet.

Eleverne må blive fortrolige med den type af spørgsmål, der stilles i matematik. Det er netop kernen i tankegangskompetencen: At stille spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, og have blik for, hvilke typer af svar som kan forventes.

Et aspekt af faglig læsning i matematik er altså, at eleverne skal lære at overskue og sammenkæde forskellige teksttyper og illustrationer på en side, finde væsentlige oplysninger, bruge dem i problemløsning og reflektere over spørgsmål og svar, men eleverne må et lag dybere endnu, når det handler om læsning af matematik. Matematikken er ofte iklædt fortællinger, illustrationer, symboler m.m., og disse forskellige dele er forskellige repræsentationer for selve matematikken. Matematikken opfattes ofte som meget abstrakt, men vi arbejder med den i de forskellige repræsentationer. Det er netop ved at arbejde med flere forskellige repræsentationer af det matematiske begreb og danne relationer mellem repræsentationerne, at eleverne udvikler matematisk forståelse og altså lærer matematik – og det må være en stor del af formålet med faglig læsning.

Kompetenceområdet repræsentation og tankegang er således helt centralt i forbindelse med faglig læsning – matematiske tekster kan betragtes som en sammensætning af forskellige repræsentationer. Ud over at eleverne skal kunne afkode de skrevne ord, har matematikken altså et sprog i sig selv – et univers af repræsentationer, hvor de skrevne ord kan være ét af dem – som eleverne lærer at kende, selv skal udvikle og skal lære at udtrykke sig ved hjælp af.

I situationer, hvor eleverne skal løse et praktisk problem fra den virkelige verden, skal de ofte læse matematikholdige tekster, der kan sætte dem i stand til at forstå noget af den kontekst, problemet er i, og som giver dem de oplysninger, der sætter dem i stand til at løse problemet vha. matematik, fx ved at opstille en matematisk model.

Faglig læsning i overbygningen vil ofte kræve, at eleverne forholder sig til spørgsmål som:

- Hvad er læseformålet? Fx at lære noget matematik eller at løse et problem, der kræver læsning af matematikholdige tekster.
- Hvad tror jeg, forfatteren eller opgavestilleren vil have os til at gøre?
- Hvad ved jeg i forvejen? Både om det emne (praktisk eller matematisk), der skal arbejdes med, og de matematiske begreber, der er med i teksten.
- Hvilken læsestrategi skal jeg anvende? Hvilken læsemåde skal jeg anvende?
- Er der nogle fagord, jeg skal have forklaret? Både matematiske begreber og begreber fra teksten vedrørende det praktiske problem. Det kan gøres til jagten på de svære ord.
- Hvordan skal jeg holde rede på det, jeg læser? Fx notater, tegninger osv.

Ofte vil faglig læsning og problemløsning med fordel foregå i et samarbejde mellem to elever. Faglig læsning i et makkerparsamarbejde kunne foregå efter følgende opskrift:

- Læs teksten højt for hinanden (læseafkodning).
- Genfortæl teksten for hinanden (læseforståelse).
- Hvad handler teksten om, hvad er opgaven, og hvordan skal den løses (elementær læsekompetence)?
- Tegn et billede af opgaven (mental repræsentation).
- Hvilke løsningsstrategier kan vi bruge, og hvilken skal vi vælge (funktionel læsekompetence og matematisk kompetencer)?
- Giv et overslag (hverdagserfaringer og talforståelse).
- Beregn resultatet (matematiske færdigheder).
- Sammenlign resultatet med overslaget og spørgsmålet (refleksion).

For at støtte elevernes læseproces i alle fag, kan man i samarbejde med teamet arbejde med læsestrategifolderne, som indeholder en vifte af læsestrategier på dansk, tysk og engelsk. Bestilles gratis på Skoleforeningens Indkøbskontor.
Se endvidere Mål for Sprog og Læsning:
http://www.skoleforeningen.org/indsatsomraader/sprog-og-laesning/maal-og-handleplan

IT OG MEDIER

Igennem de seneste årtier er it kommet til at spille en stadig større rolle i samfundet, i elevernes hverdag og i skolens matematikundervisning. It-kompetencer er blevet en naturlig del af såvel den almene dannelse, som de krav, uddannelser og arbejdsliv stiller. Det er således let at argumentere for, at it bør indtage en central plads i skolens undervisning, herunder naturligvis matematikundervisningen, men dette åbner imidlertid for en lang række spørgsmål, fx om hvordan it kan anvendes på en måde, så det kommer til at støtte elevernes tilegnelse af matematiske kompetencer. Det er nemlig på ingen måde sådan, at it kan støtte enhver hensigt med undervisningen. Det bør fra forløb til forløb overvejes, hvordan anvendelsen af it kan støtte elevernes opfyldelse af færdigheds- og vidensområder. Det er fx sjældent en hensigtsmæssig inddragelse af it, hvis det medfører, at eleverne kigger passivt på en interaktiv tavle.

It indgår både som mål og middel i matematikundervisningen. Først og fremmest er it et middel til, at eleverne opnår målene, fx kan forskellige digitale værktøjer anvendes som redskab i problemløsning og anden opgaveløsning og dermed give nye muligheder i arbejdet med matematik. Samtidig er det et mål, at eleverne opnår hjælpemiddelkompetence, herunder fx at kunne anvende digitale værktøjer til undersøgelser, kunne vælge hjælpemiddel og vurdere forskellige hjælpemidlers muligheder og begrænsninger. Det er imidlertid helt afgørende, at eleverne tilegner sig disse kompetencer i arbejdet med relevante matematiske stofområder, således at hjælpemiddelkompetencen ikke løsrives fra arbejdet med de matematiske stofområder. Det er flere gode grunde til at inddrage it i matematikundervisningen. For det første er det vigtigt, at skolen i videst muligt omfang ligner det omgivende samfund, hvor eleverne til daglig er omgivet af smartphones, computere, tablets og lignende, som indgår naturligt og med selvfølgelighed i deres hverdag. Hvis den verden, eleverne møder i skolen, er meget fjern fra den, de møder uden for skolen, kan skoleverdenen opleves som en parallelverden og miste sin legitimitet. Eleverne vil simpelthen ikke kunne forbinde det, de lærer i skolen, med den verden, de møder uden for skolen.

For det andet kan it i en række tilfælde støtte elevernes forståelse af faglige begreber og sammenhænge – især fordi en række digitale værktøjer giver eleverne mulighed for at visualisere, undersøge og eksperimentere med disse matematiske begreber og sammenhænge, fx ved at gentage en beregning, tegning eller lignende mange gange eller ved at simulere et stokastisk eksperiment et stort antal gange. Eleverne kan på den måde meget hurtigt afprøve rigtig mange eksempler og derudfra opstille hypoteser om generelle sammenhænge. Det kan fx være eksperimenter i et regneark, hvor eleverne undersøger, hvordan et datasæt skal se ud, for at medianen er mindre end middeltallet, eller et geometriprogram, som bruges til at undersøge sammenhængen mellem omkreds og areal i et rektangel i de første trinforløb eller sammenhængen mellem en cirkels periferivinkel og centervinkel i udskolingen. De hypoteser, som eleverne formulerer på baggrund af deres undersøgelser, kan i nogle tilfælde, især på de ældste klassetrin, være udgangspunkt for mere formelle matematiske ræsonnementer og beviser. I andre sammenhænge er undersøgelserne med til at give eleverne forskelligartede erfaringer med og billeder af matematiske begreber, som fx median og middeltal ovenfor, eller matematiske sammenhænge, som fx sammenhængen mellem centervinkel og periferivinkel i eksemplet. På den måde skal arbejdet med digitale værktøjer give eleverne erfaringer, som sammen med en række andre typer af aktiviteter og undersøgelser er med til at opbygge deres begrebsdannelse.

For det tredje giver it mulighed for at arbejde med anderledes og tidssvarende kommunikationsformer om og med matematik. I den forbindelse kan der i undervisningen indgå digitale værktøjer som lommeregner, regneark, CAS, dynamiske geometriprogrammer og præsentationsprogrammer samt programmer til video-, skærm- og lydoptagelser. Digitale hjælpemidler til brug i matematik stiller ofte store krav til elevernes fagsprog og matematiske symbolsprog. Det kan i nogle tilfælde virke hæmmende på elevernes brug af nogle programtyper, fx CAS, men det kan samtidig være med til at øge elevernes fokus på og dermed udvikle deres fagsprog og brug af matematiske symboler. Ud over de fagspecifikke programmer er også anvendelse af it til lyd-, video- eller skærmoptagelser særdeles relevant i matematikundervisningen. Disse redskaber giver eleverne en række nye måder at udtrykke sig om matematiske forhold på, som kan være særdeles udbytterige, fx som evalueringsaktivitet. Det kan fx være et videooptaget nyhedsindslag, hvor eleverne præsenterer en statistisk undersøgelse, de har gennemført, eller det kan være en skærmoptagelse af en undersøgelse i et geometriprogram af diagonalernes skæring i forskellige firkanter.

Lommeregner

Det er en god ide at lade skolens fagteam beslutte, hvilken lommeregner skolen anbefaler. Et forpligtende køb af et bestemt produkt kan dog ikke kræves. De fleste forældre vil dog følge anbefalingen, når fordelene af en ensartet lommeregner i klassen tydeliggøres. Ligesom geometri-trekanten, passeren og linealen er lommeregneren fra 7. klassetrin et af penalhusets redskaber. Mobiltelefonen kan ikke anbefales som lommeregnererstatning, da denne ikke må anvendes til eksamen, og en sikker håndtering af den videnskabelige lommeregner således ikke vil blive opnået.

Der kan organiseres fælles indkøb af lommeregnere, skolen er dog ikke forpligtet til dette. Ved fælles indkøb skal der tages højde for gældende datasikkerhedsbestemmelser. Der anbefales, at man kører med samme model over en længere årrække og ikke skifter model hvert år.

Det er faglærerens opgave at formidle de grundlæggende færdigheder i brugen af lommeregneren i løbet af 7. klassetrin. Dette betyder ikke, at der udelukkende skal arbejdes med lommeregner. Selvom lommeregneren før er blevet anvendt til kontrol af skriftlige udregninger, er det alligevel nødvendigt med en grundlæggende introduktion. Hertil anbefales det at anvende en softwarelommeregner, hvor eleverne kan følge en præsentation på skærm. Herigennem hjælpes eleven på vej med at finde de rette knapper, især hvor knapperne har flere funktioner, fx kvadratrod og x^2

I opstartsfasen kan det være nødvendigt at introducere ved hjælp af tastevejledninger for senere at vejlede i, hvilken vej der er optimal til indtastning. En væsentlig del af undervisningen bør fortsat være vurdering og fornuftig afrunding af facit samt matematisk notation.

Introduktionen i lommeregneren er ikke begrænset til 7. klassetrin. Når nye funktioner tages i brug, skal disse også behandles på lommeregneren. Den grundlæggende betjening skal være afsluttet i 7. klassetrin, mens de efterfølgende specifikke funktioner behandles fortløbende.

Grundlæggende punkter i anvendelsen af lommeregneren

Ved indtastning i rækker, skal der sættes parenteser, der efter almindelige algebraiske regneregler er overflødige.

Notation	Grafisk indtastning	Rækkevis indtastning
$\frac{3+4}{2}\cdot 1.5$	$\frac{3+4}{2}\ \boxed{\text{x}}\ 1{,}5\ \boxed{=}$	$(3\ \boxed{+}\ 4)\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{\text{x}}\ 1.5\ \boxed{=}$

Rækkevis indtastning kan også bruges med mellemregninger, dette er dog ikke den optimale måde.

$$3\ \boxed{+}\ 4\ \boxed{=}\quad \boxed{\div}\ 2\ \boxed{\text{x}}\ 1.5\ \boxed{=}$$

Den grafiske indtastning skal have fortrinsret for alle andre indtastningsformer, da den er så tæt på den matematiske notation og udløser de færreste fejl. Målet er, at en udregning kan udføres i en indtastning. Eleven skal kende til fordele og ulemper ved de forskellige indtastningsformer.

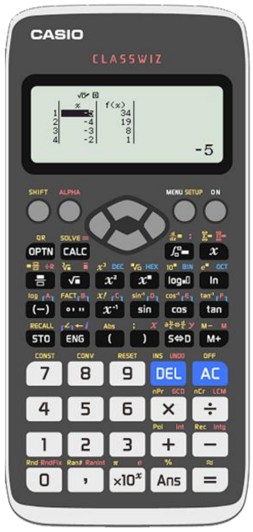
Der tilstræbes at lommeregnerhukommelsens muligheder udnyttes i opgaver med flere beregninger, således at delresultater kan hentes ud af hukommelsen efter behov. Herved opnås en større nøjagtighed i efterfølgende resultater.

Værditabeller

Eksempel: Fremstil en værditabel til funktionen f(x) = $2x^2+3x-1$ så vi kan tegne parablen i området -5 til +5

MENU ▼ ▼ = 2 x x² + 3 x − 1

For at komme til tabelmodus



Tryk = = for at bekræfte ligningen og lade ligning g(x) tom.

Efterfølgende trykker man

(−) 5 = 5 = 1 = =

For at bestemme nedre grænse, øvre grænse og interval.

Efterfølgende får man på skærmen en oversigt over værdierne. Med piletasterne kan man navigere i tabellen.

Med SHIFT OPTN kan man lave en QR kode der henviser til en hjemmeside som tegner grafen.

Ligningsløsning

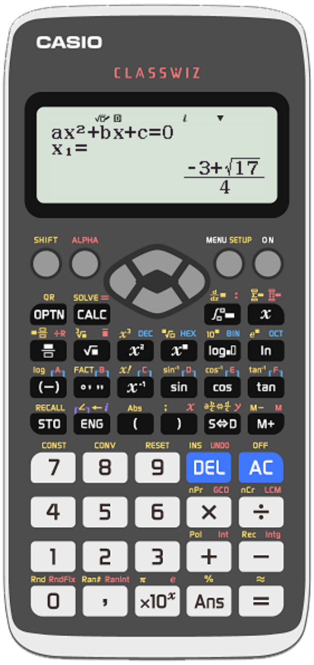
Eksempel: Løsning af ligningen $2x^2+3x-1=0$

MENU ▼ ▼ ▶ = 2 2 2 = 3 = (−) 1 = = S⇔D = S⇔D

$ax^2+bx+c=0$

$X_2=$

$$-1,780776406$$



Når vi anser $2x^2+3x-1$ som en funktionen (parabel) har vi med x_1 og x_2 fundet skæringspunkterne med x-aksen. Vil vi bestemme toppunkter fortsætter vi med at trykke på = tasten. Herved får vi x koordinaten

Min v. $y=ax^2+bx+c$

$x=$

$$-\frac{3}{4}$$

Met et yderlig tryk på = fortsættes der til y koordinaten.

Min v. $y=ax^2+bx+c$

$y=$

$$-\frac{17}{8}$$

Dynamiske geometriprogrammer
I dag findes en række dynamiske geometriprogrammer, som gratis kan hentes på internettet. En stor del af det traditionelle arbejde med at konstruere fx trekanter med givne egenskaber vil naturligt foregå på computeren. Ligesom lommeregner og computer har suppleret håndteringen af standardalgoritmer i forbindelse med arbejdet med tal og algebra, supplerer anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer også udviklingen af tegnemetoder til geometriske konstruktioner på papir.

Samtidig åbnes der for mange nye muligheder for at udvide elevernes arbejde med geometrisk konstruktion, undersøgelser med henblik på forståelse af geometriske regler og ræsonnementer.

Arbejdet med dynamiske geometriprogrammer kræver ofte, at en række geometriske begreber er kendte. Med disse begreber på plads kan eleverne relativt nemt konstruere en trekants omskrevne cirkel ved at tegne en trekant, herefter tegne midtnormaler og endelig tegne cirklen med centrum i midtnormalernes skæringspunkt og med den givne radius. Herefter kan eleverne ved at trække i punkter og linjestykker undersøge, hvad der sker med midtnormalerne og den omskrevne cirkel, når trekanten ændrer form.

Det interessante er ikke, at computeren kan tegne. Det interessante er derimod, at eleverne får øgede muligheder for at arbejde med tegning, undersøgelser, analyser og ræsonnementer i tæt sammenhæng.

Også i forbindelse med arbejdet med geometriske mønstre rummer computeren store muligheder på alle klassetrin. I forbindelse med et sådant arbejde er det oplagt at gennemføre ræsonnementer omkring linjer ved trekanter, cirkler, vinkler, flytninger, symmetri osv.

Computeren rummer også særlige muligheder for at arbejde i et tilsyneladende tredimensionalt rum, og det kunne fx være oplagt at lade eleverne stifte bekendtskab med et program af den slags. I et sådant program kan man opgive mål for rumlige figurer og meget hurtigt sammensætte disse figurer og betragte dem fra forskellige vinkler som en perspektivtegning.

Følgende redskaber kan anbefales: Geogebra, graflommeregner, SmartNotebook, Mathcad

Se endvidere vejledning for it og medier på EMU: https://www.emu.dk/modul/it-og-medier-vejledning

INNOVATION OG ENTREPRENØRSKAB

Matematik er et af de fag i skolen, der giver muligheder for at udvikle elevernes kompetencer inden for innovation og entreprenørskab: ”Entreprenørskab er, når der bliver handlet på muligheder og gode ideer, og disse bliver omsat til værdi for andre. Den værdi, der skabes, kan være af økonomisk, kulturel eller social art" (Definitionen er udarbejdet af Fonden for Entreprenørskab på baggrund af EU og OECD).

Entreprenørskab er således handlingen og bestræbelsen på at omsætte muligheder til værdi; at forsøget måske ikke lykkes, gør ikke handlingen mindre entreprenøriel. Denne bygger på kreativitet, innovation og iværksætteri:

- Kreativitet er evnen til at få ideer, se og skabe muligheder samt evnen til problemløsning.
- Innovation er en social proces, hvor muligheder identificeres, og kreativiteten bruges til at skabe nyt, som er værdifuldt for en selv og andre.
- Iværksætteri er at sætte noget i gang, uden at det nødvendigvis indebærer, at der skabes noget nyt.

I målene for matematik er innovation og entreprenørskab ikke omtalt direkte, men arbejdet med nogle af de færdigheds- og vidensmål kan samtidigt rettes mod innovation og entreprenørskab. Det gælder især de færdigheds- og vidensmål under modellering.

Man kan fx forestille sig, at arbejdet med den matematiske kompetence modellering giver anledning til følgende oplæg:

Et mejeri overvejer at begynde en produktion af kartoner med 1,5 liter mælk. Spørgsmålet er, hvordan kartonen skal se ud? Der skal helst ikke bruges for meget pap til fremstillingen af kartonen, og den skal være god at transportere og god at holde på, når man hælder mælk fra den. Jeres opgave er at fremstille en model (fx en tegning) af en mælkekarton, der opfylder disse krav.

Oplægget kan give anledning til, at eleverne gruppevist diskuterer forskellige muligheder vedrørende mælkekartonens form. Hvilken form og hvilke mål kan den i det hele taget have, hvis den på samme tid skal kunne rumme 1,5 liter, forbruge lidt pap, være god at hælde af og let at transportere? Eleverne må igennem deres samarbejde både identificere muligheder og bruge kreativitet for at skabe et produkt, der, i princippet, kunne være værdifuldt for dem selv og andre. Måske medfører denne innovative og kreative proces et produkt der, i princippet, kunne omsættes til værdi – specielt hvis den model, eleverne fremstiller, har et minimalt forbrug af pap.

Allerede i indskolingen kan eleverne i matematik arbejde mod innovation og entreprenørskab. I et undervisningsforløb kan det tænkes, at eleverne i en 3. klasse får til opgave at fremstille en model af deres skolegård, som de kunne tænke sig, den så ud.

I begyndelsen af forløbet arbejder klassen med set fra oven-tegninger. Eleverne har opmålt og tegnet deres klasseværelse set fra oven, og de har tegnet inventar på tegningen, så godt det kan lade sig gøre. Lærerne har introduceret en tændstik som en miniatureudgave af en meterstok, så eleverne kan bruge den til at tegne tingene tilnærmelsesvist i de rette forhold. Selve skolegårdsforløbet begynder med en idefase, hvor eleverne kommer med ideer til, hvilke funktioner en legeplads skal have. Det kan fx tænkes, at eleverne har som de vigtigste forslag, at de skal kunne spille bold og lege fangelege, men også, at der skal være plads til at hygge sig nogle få sammen eller alene.

Lærerne har på forhånd målt skolegården op og tegnet den i et passende målforhold på A2-papir. Samtidig har de lavet målepinde af lister i 10 millimeters bredde og tilpasset længdeforholdet, så de svarer til 10 meter og underdelt i "meter". På den måde har eleverne hele tiden en fornemmelse af, hvordan deres tegnede model passer med virkelighedens verden, hvilket harmonerer med det formulerede mål for forløbet. Når eleverne diskuterer størrelsen af en ting, kan de måle efter med en rigtig meterstok for at se, om det matcher deres ideer om størrelsen af fx et legestativ.

Det kan være svært for nogle af eleverne i 3. klasse at se den tredimensionelle virkelighed i en tegning i to dimensioner, og flere har lyst til at folde legeredskaberne ud i tre dimensioner. Spørgsmål om, hvad man kan se på en set fra oven-tegning, melder sig automatisk:

- Hvordan kan man finde ud af, hvor højt klatrestativet er?
- Hvordan kan vi tegne, så man kan se skolegården fra flere sider?

Senere i forløbet begynder arbejdsfasen, hvor eleverne skal få deres tegnede model af skolegården til at udfolde sig i et tredimensionelt univers. Hele tiden gør elever og lærere sig tanker om modellens anvendelighed i forhold til det stykke virkelighed, de ønsker at beskrive. Samtidig handler det overordnet set om at få ideer, se og skabe muligheder samt løse problemer – det er en kreativ proces, som giver mulighed for at skabe noget, der, i princippet, kan have værdi for andre.

© Undervisningsministeriet: Tredimensionel model af skolegård – lavet af elever

Efterfølgende kan lærere støtte eleverne i at gøre forsøget på at få en eller flere af deres ideer omsat til virkelighed, fx ved at præsentere ideerne til legepladsen for skolens ledelse.

Se endvidere vejledning for innovation og entreprenørskab: https://www.emu.dk/modul/innovation-og-entrepren%C3%B8rskab-vejledning-0

KULTURFORSTÅELSE

Under udarbejdelse

UNDERVISNINGSDIFFERENTIERING

Det er vigtigt at have for øje, at det er elevens læring der sættes i centrum.

Læring er en asynkron proces, og i en klasse kan der være stor diversitet og heterogenitet. Det er derfor op til læreren at differentiere og tilpasse undervisningen, så hver enkelt elev bliver udfordret på sit niveau.

Der er to måder, hvorpå læreren kan imødekomme elevernes forskelighed: ved at *elevdifferentiere* og ved at *undervisningsdifferentiere*. Elevdifferentiering handler om at differentiere i forhold til eleverne, fx ved at opdele dem efter niveau, køn, behov osv. Undervisningsdifferentiering handler om, at læreren tilrettelægger undervisningen inden for klassens fællesskab, så den tager hensyn til den enkelte elevs behov og forudsætninger. Her imødekommes elevernes forskelligheder på en sådan måde, at alle elever udfordres fagligt, socialt og personligt.

Begge måder kan være anvendelige i skolen, og er ikke nødvendigvis hinandens modsætninger.

Undervisningsdifferentiering som princip

Undervisningsdifferentiering kan ikke reduceres til en enkelt organisationsform eller undervisningsmetode – der er tale om et princip, som ligger til grund for undervisningen. Undervisningsdifferentiering er en kompleks størrelse, og bør anskues ud fra et bredt perspektiv. Det er ikke det samme som individualiseret undervisning, og det er heller ikke noget, der "blot" kan arbejdes med i særlige perioder om året. Det må være et bærende princip for al undervisning. Undervisningsdifferentiering kræver, at læreren har en stor evalueringskompetence. Læreren må ud fra de gældende læreplaner løbende evaluere klassens niveau samt vurdere, hvad der er næste skridt for både klassen og den enkelte elev, hvilket kræver et tæt samarbejde med eleverne. Læreren må være nysgerrig på egen praksis og fx sammen med sit team undersøge, hvad der virker bedst ved løbende at tage stilling til nedenstående spørgsmål:

1. Hvad er det, jeg ønsker eleverne skal lære?
2. Hvordan vil jeg planlægge min undervisning efter det?
3. Hvordan ved jeg, at eleverne har lært det?
4. Hvordan vil jeg reagere, når nogle elever ikke lærer det, eller nogle elever allerede kan det?

På skoler, hvor man har samlæste klasser, stilles der krav til læreren om øget opmærksomhed i forhold til undervisningsdifferentiering. Her må læreren tilrettelægge undervisningen, så den kan favne læreplanens mål til flere klassetrin. Her kan der fx arbejdes med et kompetenceområde for hele klassen, hvor målene er niveaudelte og indarbejder flere af kompetenceområdets videns- og færdighedsmål.

I al undervisning kan det være brugbart at tænke undervisningen på tre niveauer, men det kan være særligt vigtigt i de samlæste klasser:

Niveau 1: Dét, alle skal kunne
Niveau 2: Dét, de fleste skal kunne

Niveau 3: Dét, nogle få skal kunne

Niveauerne skal ikke anskues som statiske og der skal gives plads til, at eleverne kan bevæge sig mellem niveauerne, fx inden for de forskellige områder i faget. Klassen arbejder med det samme indhold, og lærer og elev finder sammen ud af, hvilket niveau der er passende for den enkelte elev.

De fem områder

Undervisningsdifferentiering går ud på, at læreren inden for klassens fællesskab tilpasser sin undervisning til elevgruppens forskellighed med udgangspunkt i nedenstående fem områder (kilde 1):

- Indhold
- Metoder
- Organisering
- Materialer
- Tid

Læreren må fx kunne veksle mellem, at eleverne arbejder alene, to sammen, i grupper og fælles i klassen. Nogle elever skal have længere tid til en opgave, og der kan være forskellige krav til opgaveløsning. Der kan varieres i form af materialer og brug af metoder. Læreren kan også tilrettelægge dele af undervisningen, så eleven selv kan være med til at vælge indholdet, og hvor der stilles opgaver på forskellige niveauer.

Der er tale om et system, hvor læreren leder arbejdet i klassen, hvorefter eleverne kan overtage – *i hvert fald en god del af* – ansvaret for egen læring. Undervisningsdifferentiering kræver, at læreren er en dygtig klasseleder, som kan sikre tydelighed og struktur, planlægge undervisningen, så der er udfordringer til alle, og opbygge gode relationer til den enkelte elev.

Undervisningsdifferentiering i praksis

I praksis kan der arbejdes med undervisningsdifferentiering på mange måder.

Cooperative Learning (CL) er en metode, som kan medvirke til en differentieret undervisning. CL er en betegnelse for undervisning, hvor eleverne samarbejder efter bestemte principper og i tydelige strukturer med henblik på læring. Læringen foregår oftest i teams, som skal frembringe en synergieffekt, hvor den enkelte elev såvel som fællesskabet bliver tilgodeset og har fælles indbyrdes ansvar. Her er det vigtigt, at der gives plads til at lave fejl, og at alle elever aktiveres. Læreren må i den forbindelse bl.a. overveje, hvordan eleverne sættes sammen, samt hvilket tidsforløb der arbejdes inden for.

Ugeskema er en anden metode, som også kan fremme differentiering i undervisningen. Metoden går kort beskrevet ud på, at alle de opgaver eleverne skal lave i løbet af ugen, er opsummeret i et afkrydsningsskema. I begyndelsen er opgaverne ens for alle, men ret hurtigt kan skemaet bruges til at differentiere, så der er forskel på, hvilke opgaver eleverne skal løse. Det er her afgørende, at opgaverne har fokus på elevernes læring og ikke kun aktiviteter. Læreren må løbende i dialog med eleverne om deres læring og brug af strategier.

Individuel tid er en tredje metode, som kan anvendes på forskellig vis. Her afsættes tid til, at eleverne enten i det enkelte fag eller på tværs af fag arbejder med individuelle mål og opgaver tilpasset den enkeltes niveau. Det kan fx udmøntes i et læsebånd, hvor alle elever læser, men netop udfordres på deres niveau. Det kan være læsning som afgrænset mål, men kan også omhandle faglig læsning. Individuel tid kan også udmøntes i en form for fordybelsesstund, hvor eleven alene eller sammen fordyber sig i områder, som der er brug for at samle op på, repetere eller træne yderligere for at sikre konsolidering. Her må læreren samarbejde tæt med både den enkelte elev og sine kollegaer, for netop at kunne imødekomme den enkelte elevs behov.

Kilde: https://www.eva.dk/grundskole/undervisningsdifferentiering-baerende-paedagogisk-princip

Undervisningsdifferentiering i matematik
I valget af undervisningsaktiviteter er det i et differentieringsperspektiv afgørende, at eleverne får mulighed for at arbejde på forskellige niveauer og med forskellige tilgange. Det betyder ikke nødvendigvis, at eleverne skal arbejde med forskellige aktiviteter. Fx kan åbne opgaver give differentieringsmuligheder. Disse opgaver kan fx være åbne ved at kunne besvares på forskellige måder eller ved, at eleverne kan finde løsninger gennem forskellige arbejdsformer.

Valg af organisationsformer er endnu et område, som har betydning for lærerens mulighed for at differentiere undervisningen. Organisationsformerne skal bl.a. sikre, at læreren i perioder får mulighed for at tale med en eller få elever ad gangen længe nok til at kunne sætte sig ind i deres tænkning. Kun ved at vide, hvad eleverne tænker, får læreren mulighed for at tage udgangspunkt i elevernes forudsætninger og potentialer.

Mange matematiklærere har især på begynder- og mellemtrinnet oplevet, at det kan være vanskeligt at få denne tid sammen med enkeltelever eller med få elever ad gangen. Især kan det være problematisk, hvis mange elever har brug for hjælp på samme tid. Læreren kan hurtigt blive til en person, der springer rundt i klassen og kun når at give få informationer, inden han eller hun må videre til den næste, der har brug for hjælp.

For at imødekomme dette problem er det ofte en god ide at organisere undervisningen, så eleverne i perioder arbejder i grupper. En klasse med 24 elever kan fx deles i fire grupper, der ikke har den samme aktivitet. På den måde kan det planlægges, at lærerens hjælp er koncentreret omkring de grupper, som arbejder med opgaver, der kræver meget hjælp – eller med opgaver, som giver gode muligheder for, at læreren kan sætte sig ind i elevernes tænkning.

Organisationen i grupper – eller i værksteder tænkes, a– giver også mulighed for, at eleverne kan arbejde med forskellige tilgange til det samme faglige emne. Nogle elever kan have særlig glæde af at arbejde med ligningsløsning ved hjælp af fysiske handlinger med konkrete materialer, mens andre arbejder med ligninger med støtte i illustrationer, og andre igen arbejder med ligninger med udgangspunkt i det matematiske symbolsprog.

I forbindelse med organisationsformer, der baserer sig på elevers forskellige tilgange til læring, er det vigtigt at være opmærksom på, at den centrale aktivitet for alle eleverne er deres tænkning – ikke de fysiske handlinger. Eleverne lærer fx ikke multiplikation ved at kaste en bold til hinanden eller ved at synge tabelsange – men ved at de gennem tænkning forbinder det nye begreb med viden, de allerede har gjort til deres egen. Aktiviteter med konkrete materialer eller med illustrationer kan støtte elever til dette.

I perioder eller sekvenser, hvor undervisningen baserer sig på klassens dialog, er det naturligvis oplagt, at klassen arbejder samlet med læreren som leder. Læreren har i denne organisationsform mulighed for at inddrage elevernes forskellige input i dialogen ved fx at spørge, reformulere og konkludere på baggrund af elevernes input. I en sådan undervisning bidrager elevernes forskellighed til at lægge forskellige perspektiver på den faglige samtale.

EKSEMPLER PÅ UNDERVISNINGSFORMER

En skoledag skal samlet set byde på varieret og anvendelsesorienteret undervisning med henblik på at øge elevernes alsidige udvikling, motivation og trivsel. I dette afsnit gives ideer til, hvordan den fagdelte matematikundervisning også kan fremstå varieret og anvendelsesorienteret.

Udgangspunktet for undervisningen i matematik er færdigheds- og vidensområderne fra læreplanen. De undervisningsformer, læreren vælger i matematikundervisningen, skal derfor være meningsfulde i forhold til de færdigheder, den viden og de kompetencer, eleverne skal opnå i faget. For de fleste af målenes vedkommende har læreren mulighed for at vælge mellem eller inddrage mange forskellige undervisningsformer og dermed mulighed for at variere undervisningen. Det gælder fx for det færdigheds- og vidensmål under regnestrategier i anden fase i målene efter 2. trinforløb: "Eleven kan udføre beregninger med de fire regningsarter inden for de naturlige tal". Undervisning, der er rettet mod et sådant mål, vil fx kunne formes som:

Værkstedsarbejde

Det kan fx tænkes, at klassens elever inddeles i fire grupper, der arbejder i hvert deres værksted. Hvert værksted er rammen omkring et sæt aktiviteter eller opgaver, der er forbundet med det færdigheds- og vidensmål. I et værksted skal eleverne fx udarbejde regnehistorier ud fra forskellige regneudtryk. I et andet værksted skal eleverne opstille et budget i et regneark. I et tredje værksted spiller eleverne et spil, der kræver hovedregning, og i et fjerde værksted øver eleverne overslagsregning i forbindelse med (et fiktivt) indkøb. Undervisningen kan være planlagt sådan, at eleverne rokerer mellem værksteder, fx hver halve time, så de i løbet af nogle lektioner kommer igennem alle værkstederne. Det kan også tænkes, at hvert værksted er rammen om aktiviteter og opgaver, som har forskellige sværhedsgrader, og at hver elev ikke skal arbejde i alle værksteder. En af fordelene ved værkstedsarbejde kan være, at værkstederne kan organiseres sådan, at læreren ikke nødvendigvis skal hjælpe lige meget i hvert værksted. Det kan skabe differentieringsmuligheder, hvis læreren i en periode kan koncentrere sin tid i et eller to af værkstederne.

Projektarbejde

Det kan fx tænkes, at undervisningen tager udgangspunkt i problemstillinger, der vedrører planlægningen af en kommende udflugt. Hvad har vi råd til på turen? Hvornår skal vi af sted, og hvornår kommer vi hjem? Hvordan finder vi vej, og hvor lang tid skal vi gå? Klassen kan i fællesskab lave en brainstorm over relevante spørgsmål og diskutere, hvordan de kan besvares. Efterfølgende kan arbejdet fordeles mellem nogle grupper, der til sidst præsenterer deres resultater. Arbejdet kan evalueres i fællesskab. En af fordelene ved denne undervisningsform er, at eleverne får gode muligheder for at arbejde ud fra egne interesser og forudsætninger.

Emnearbejde

Det kan fx tænkes, at undervisningen tager udgangspunkt i emnet ferietid, og at elever og lærer i fællesskab opstiller en række delemner, som kan indgå. Det kan fx være: penge i forskellige lande (valuta og priser), vejret i forskellige lande, tidszoner og rejselængder (tid og afstand). Eleverne kan i samarbejde med læreren indsamle og bearbejde oplysninger om de forskellige delemner. De færdige resultater fremlægges i klassen, og der evalueres på forløbet. På samme måde som ved projektarbejde kan denne undervisningsform give eleverne gode muligheder for at arbejde ud fra egne interesser og forudsætninger.

Opgaveløsning

Traditionelt set har især individuel opgaveløsning fyldt meget i matematikundervisningen – måske så meget, at matematik for mange elever fremstår som et fag, som netop går ud på at løse opgaver. En fordel ved opgaveløsning som undervisningsform kan være, at opgaverne kan give eleverne mulighed for at arbejde aktivt i deres eget tempo. Den type aktivitet, eleverne har i forbindelse med opgaveløsning, er imidlertid afhængig af opgavernes karakterer. En opgave kan være mere eller mindre kognitivt udfordrende, og den kan have forskellige grader af åbenhed og anvendelsesorientering. Set i forhold til princippet om undervisningsdifferentiering kan det i matematikundervisningen ofte være en fordel at vælge opgaver, som er åbne enten i de forskellige tilgange, eleverne kan have til opgaven, eller i de forskellige løsningsmuligheder, der kan være til den samme opgave. I forbindelse med det konkrete mål kan et eksempel på en åben opgave være: Tasterne 1,3 og 5 er gået i stykker på din lommeregner. Kan du alligevel få den til at skrive 135? Hvordan? Skriv mange løsninger.

Undersøgelseslandskaber

Tidligere professor i matematikdidaktik, Ole Skovsmose, har indført begrebet undersøgelseslandskaber om undervisningssituationer, hvor eleverne tager imod en opfordring om at gennemføre en udforskning. Et undersøgelseslandskab kan fx tage udgangspunkt i en afgrænset kontekst eller i en situation, som læreren opfordrer eleverne til at undersøge. For at der skal blive tale om et undersøgelseslandskab, skal eleverne tage imod invitationen om udforskning og efterhånden selv stille undersøgelsesspørgsmål, sådan at det bliver elevernes forundring, der bliver styrende i undervisningen. Når det lykkes, kan undersøgelseslandskaber betragtes som en undervisningsform, der giver gode muligheder for differentiering og for at fokusere på aspekter ved helt centrale matematiske arbejdsmåder, herunder problemformulering, systematisering, hypotesedannelse, ræsonnement, matematisk kommunikation, abstraktion og generalisering. I forbindelse med det konkrete eksempel kan et undersøgelseslandskab fx udspringe af spørgsmål knyttet til en taltavle: Jeg har tegnet en firkant i taltavlen. Prøv at se på summen af de gule tal og summen af de røde tal i firkanten. Prøv at tegne en lignende firkant andre steder på taltavlen og beregn de tilsvarende summer. Hvad opdager I? Gælder det altid? Hvad hvis firkanten havde en anden størrelse? Hvis vi ganger tallene? Hvis vi ændrede firkanten til en anden form, fx et parallelogram? Hvad nu hvis ...?

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91

Klasseundervisning

Klassens samlede arbejde under lærerens styring giver gode muligheder for bl.a. dialoger, præsentationer og opsamlinger. Det er i klasseundervisningen, læreren har mulighed for at præsentere bl.a. forløb, aktiviteter og mål, sådan at eleverne får mulighed for at målrette og se mening med deres arbejde i undervisningen. Igennem dialog kan bl.a. ideer, faglige forståelser og kritiske overvejelser udveksles, og læreren får mulighed for at guide elevernes deltagelse igennem sine svar og handlinger. Det er også i klasseundervisningen, at læreren får mulighed for at sammenfatte de resultater, forståelser og pointer, som eleverne har givet udtryk for, og forbinde disse med det, eleverne har lært tidligere. Det vil ofte være hensigtsmæssigt at bruge klasseundervisning i en variation med andre undervisningsformer, og i nogle tilfælde kan klasseundervisningen næsten ikke adskilles fra andre undervisningsformer – de filtrer sammen. Det gælder fx i et undersøgelseslandskab, hvor der kan være en vekslen mellem elevernes selvstændige aktivitet og klassens samlede dialog.

I en stor del af de færdigheds- og vidensmål for matematik indgår ordet anvende. Det gælder fx færdigheds- og vidensmålet under geometrisk tegning: ”Eleven kan anvende skitser og præcise tegninger”. Elevernes anvendelse kan generelt rette sig mod både teoretiske og praktiske sammenhænge. Det kan således tænkes, at det nævnte færdigheds- og vidensmål nedbrydes til anvendelser både inden for faget, fx: ”Eleverne kan med brug af et geometriprogram tegne polygoner præcist ud fra givne oplysninger”, eller uden for matematik, fx: ”Eleverne kan tegne en præcis plantegning af et hus”.

Bevægelse

I matematik kan især øvelser af enkle færdigheder inden for talbehandling foregå i tilknytning til elevernes motion og bevægelse. Der kan fx arrangeres stafetløb, hvor der undervejs i løbet skal løses en opgave, fluesmækkerløb, hvor resultatet af et regnestykke skal smækkes med en fluesmækker, eller svampekast, hvor eleverne kaster våde svampe mod en målskive tegnet på en kridttavle og efterfølgende beregner deres samlede pointsum. Mulighederne for denne type øvelser er talrige, og inspiration kan let findes på bl.a. internettet.

Anvendelser, undersøgelser og dataindsamlinger er andre elementer af matematikfaget, som kan skabe mulighed for elevernes fysiske bevægelse. Anvendelsen kan fx vedrøre opmålinger i de lokale omgivelser. Hvor langt er der mon rundt om skolen? Lad os gætte og prøve efter. Hvordan kan vi måle, hvor langt der er? Hvor høj er byens højeste bygning?

Lad os gætte og prøve efter. Hvordan kan vi finde ud af, hvor høj den er? Er der flere måder? Der skal asfalteres på skolens parkeringsplads. Hvor meget asfalt får vi mon brug for? Hvordan kan vi finde ud af det?

Undersøgelserne kan fx vedrøre naturfaglige elementer, som kan behandles matematisk. Er det fx muligt at skabe ligevægt på en vippe med to børn på den ene side af vippen og et barn på den anden side af vippen, hvis de alle tre vejer ca. lige meget? Hvordan skal børnene sidde, for at det kan lade sig gøre? Hvad med tre børn? Er der et system? Kan en gynge med to børn gynge i takt med en gynge med et barn, hvis de tre børn vejer lige meget? Hvad hvis den ene gynge er kortere end den anden? Med hvilken vinkel skal du kaste en bold for at kaste længst?

Dataindsamlinger kan fx vedrøre trafik, fart eller sport. Hvor meget trafik er der på vores skolevej? Hvor hurtigt kører bilerne? Hvor hurtigt kan I køre på en cykel? Hvordan er sammenhængen mellem farten og bremselængden på en cykel? Er det sådan, at jo højere I er, jo højere springer I højdespring? Hvad med længdespring?

Det er oplagt, at eleverne ikke lærer matematik af at bevæge sig, men i forbindelse med de førstnævnte eksempler kan bevægelsen give mange elever mulighed for at øve sig på simple færdigheder i sammenhænge, som de finder meningsfulde frem for ensidige øvelser i en bog, fordi de indgår i en leg eller i et spil. I forbindelse med de sidstnævnte eksempler kan bevægelsen give mange elever mulighed for at få matematikken forbundet med konkrete og meningsfulde erfaringer.

KILDER

Vejledninger til fagene fra Forenklede Fælles Mål, Undervisningsministeriet, 2014-2018: http://www.emu.dk/omraade/gsk-lærer

Leitfäden zu den Fachanforderungen, Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein, 2014-2016: http://lehrplan.lernnetz.de

BILAG

LÆSESTRATEGIER

LÆSETEKNIKKER

LÆSETEKNIKKER
LESETECHNIKEN

OVERBLIKSLÆSNING	ORIENTIERENDES LESEN
Kig på overskrifter, billeder samt for- og bagside.	Verschaffe dir einen groben Überblick – wo ist die Überschrift, gibt es Bilder, wie ist der Text eingeteilt?

SKIMMING	ÜBERFLIEGENDES LESEN
Skim teksten: Det vil sige, lad blikket gå ned over teksten uden at læse alle ord.	Wird auch Skimming genannt. Verschaffe dir einen groben Überblick über den Textaufbau und Inhalt (Überschriften und Bildtexte lesen, Textabschnitte und Wörter überfliegen). Wovon handelt der Text?

NÆRLÆSNING	INTENSIVES LESEN
Læs alle ordene langsomt og omhyggeligt.	Lies den Text ganz genau, um den Inhalt zu verstehen. Mach dir Randnotizen, benutze den Textmarker.

PUNKTLÆSNING	SUCHENDES LESEN
Lad dine øjne glide hen over teksten, indtil du finder den information, du leder efter.	Wird auch Scanning genannt. Du suchst nach ganz bestimmten Informationen/Wörtern/Zahlen, um Fragen oder Aufgaben zu lösen.

afsnit
detaljer

LÆSESTRATEGIER 2.-4. KLASSE

LÆSESTRATEGIER
alle fag

FØR DU LÆSER

- Skim titel, for- og bagside, overskrifter og billeder. **Hvad tror du, teksten handler om**? Skriv ord i et tankekort.
- Er teksten **fakta eller fiktion**?
- Hvad er dit **læseformål** – og hvilken **læse- og notatteknik** skal du nu bruge?

MENS DU LÆSER

- **Find** ord eller tekststeder, du skal have forklaret. Brug **ordstrategier**, læs fx tekststykket igen, tænk, brug ordbogen eller spørg.
- **Tal** med din læsemakker eller lærer om dét, du ikke forstår.
- **Markér** vigtige ord i teksten.
- **Skriv notater**, fx billednotat eller kolonnenotat.

EFTER DU HAR LÆST

- Hvad handlede teksten om? **Gengiv hovedindholdet** i teksten (fortæl, tegn eller skriv). Brug også de ord og overskrifter, du har skrevet ned.
- **Samtal om** tekstens **budskab** – hvordan påvirker teksten læseren?
- Hvad har du lært?

LÆSESTRATEGIER 5.-6. KLASSE

LÆSESTRATEGIER
alle fag

FØR DU LÆSER

- **Skim** titel, for- og bagside, illustrationer. Hvad tror du, teksten handler om? Skriv ord i et **tankekort**.
- Hvad er dit **læseformål**, og hvilken **læseteknik** skal du bruge?
- Hvilken **teksttype** og **genre** læser du?
- Hvad er tekstens **formål**?
- Udfyld fx **ordkendskabskort** til centrale ord.
- Vælg **notatteknik**.

MENS DU LÆSER

- Brug **ordstrategier** til ord eller tekststeder, du ikke forstår. Læs fx tekststykket igen, tænk, brug ordbogen eller spørg.
- **Markér** vigtige ord eller tekststeder.
- **Skriv notater** – benyt den valgte **notatteknik**, fx kolonnenotat, tidslinje.
- **Stil spørgsmål** til teksten (på, mellem og bag linjerne).

EFTER DU HAR LÆST

- Lav **grafiske modeller** til at få overblik over tekstens struktur og indhold, fx
  - **kolonneskema**, **procesnotat**
  - **Venn-diagram** for at se på ligheder og forskelle.
- **Opsummér** indholdet med dine egne ord, brug stikord og overskrifter til hjælp.
- Hvad er tekstens **formål** og **budskab**, og hvilket **perspektiv** har teksten på emnet?

LÆSESTRATEGIER 7.-10. KLASSE

LÆSESTRATEGIER
alle fag

FØR DU LÆSER

- **Skim** titel, for- og bagside, illustrationer. Hvad forventer du af teksten?
- **Hvad ved du allerede** om temaet eller forfatteren? Skriv stikord, eller lav **tankekort**.
- Hvilken **teksttype** og **genre** læser du?
- Hvad er tekstens **formål**?
- Hvad er dit **læseformål**? Vælg den **læseteknik** og evt. en **notatteknik**, der passer til læseformålet.

MENS DU LÆSER

- **Markér og undersøg ord**, du ikke kender. Brug **ordstrategier** til ord eller tekststeder, du ikke forstår. Brug fx ordbogen eller din viden fra andre sprog.
- Hvad handler teksten om – hvad drejer den sig om? **Markér** vigtige dele af tekstens indhold.
- **Skriv notater** – benyt den valgte **notatteknik**, fx kolonnenotat, tidslinje.
- **Stil spørgsmål** til teksten (på, mellem og bag linjerne).

EFTER DU HAR LÆST

- **Visualiser** indholdet, fx ved hjælp af illustrationer, tegninger eller **grafiske modeller** for at få overblik over tekstens struktur og indhold, fx
  - **kolonneskema**, fx problem-virkning-årsag-løsning v. fagtekster
  - **Venn-diagram** for at se på ligheder og forskelle
  - **struktureret tankekort**.
- **Opsummér** indholdet med dine egne ord.
- Hvad er tekstens **formål** og **budskab**, og hvilket **perspektiv** har teksten på emnet?
- Sæt teksten ind i **sammenhæng**, fx samfundsmæssig, genremæssig osv., og **vurdér** tekstens udsagn kritisk.